

Álgebra Linear e Geometria Analítica

P2: Listas de Exercício

1. Transformações Lineares
 2. Mudança de Base
 3. Matriz de uma Transformação em Outras Bases
-

Profa. Karla Lima
FACET/UFGD

1 Transformações Lineares

Exercício 1 Em cada parte, determine se T é uma transformação linear.

- a) $T(x, y) = (\pi x, y)$
- b) $T(x, y) = (-y, x)$
- c) $T(x, y) = (2x + y, x - y)$
- d) $T(x, y) = (x^2 + 3, y)$
- e) $T(x, y) = (x, y + 1)$
- f) $T(x, y, z) = (0, 0)$
- g) $T(x, y, z) = (1, 1)$
- h) $T(x, y, z) = (3x - 4y, 2x - 5z)$
- i) $T(x, y, z) = (y^2, z)$
- j) $T(x, y, z) = (y - 1, x)$

Como encontrar a matriz canônica

Seja $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma transformação linear.

Para encontrar a matriz canônica de T , usamos a base canônica de $\mathbb{R}^n$:

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), \quad e_2 = (0, 1, \dots, 0), \quad \dots \quad e_n = (0, 0, \dots, 1).$$

O procedimento é:

1. Aplicar T em cada vetor da base canônica;
2. Os vetores obtidos formam as colunas da matriz de T .

Em outras palavras,

$$A = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ T(e_1) & T(e_2) & \cdots & T(e_n) \\ | & | & & | \end{bmatrix}.$$

Exercício 2 Usando o método acima, em cada parte, encontre a matriz canônica da transformação definida pelas equações.

- a) $T(x_1, x_2) = (2x_1 - x_2, x_1 + x_2)$
- b) $T(x_1, x_2) = (x_1, x_2)$
- c) $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + x_3, x_1 + 5x_2, x_3)$
- d) $T(x_1, x_2, x_3) = (4x_1, 7x_2, -8x_3)$

- e) $T(x_1, x_2) = (x_2, -x_1, x_1 + 3x_2, x_1 - x_2)$
 f) $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (7x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4, x_2 + x_3, -x_1)$
 g) $T(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0, 0, 0)$
 h) $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_4, x_1, x_3, x_2, x_1 - x_3)$

2 Mudança de Base

Exercício 3 *Determine as coordenadas do vetor indicado na base dada. Descreva o sistema linear utilizado.*

- a) Determine as coordenadas de

$$u = (3, 5)$$

na base

$$B = \{(1, 2), (1, 1)\}.$$

- b) Determine as coordenadas de

$$u = (-2, 5)$$

na base

$$B = \{(2, 1), (1, -1)\}.$$

3 Matriz de uma Transformação em Outras Bases

Exercício 4 *Em cada item:*

- i) *Encontre a matriz canônica de T ;*
 ii) *Encontre a matriz da transformação linear na base indicada;*

- a)

$$T(x, y) = (4x + y, y)$$

com

$$\beta = \{(1, 0), (1, 3)\}.$$

b)

$$T(x, y) = (3x, 2y)$$

com

$$\beta = \{(1, 1), (1, -1)\}.$$

c)

$$T(x, y) = (5x, x + y)$$

com

$$\beta = \{(4, 1), (0, 1)\}.$$

4 Autovalores e Autovetores

Exercício 5 Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

a) Calcule a matriz $A - \lambda I$;

b) Determine o polinômio característico de (A) ;

c) Encontre os autovalores da matriz (A) ;

d) Escolha um dos autovalores encontrados e determine um autovetor associado;

e) Verifique que

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}.$$

Exercício 6 Repita o exercício anterior para a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

5 Diagonalização

Exercício 7 Considere uma das matrizes estudadas nos exercícios anteriores.

a) Determine um autovetor associado a cada autovalor;

b) Verifique que os autovetores encontrados são linearmente independentes;

c) Construa a matriz

$$P = \begin{bmatrix} | & | \\ v_1 & v_2 \\ | & | \end{bmatrix};$$

d) Construa a matriz diagonal

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix};$$

e) Calcule P^{-1} no Wolfram;

f) Verifique que

$$P^{-1}AP = D;$$

g) Utilize a diagonalização para calcular A^8 .