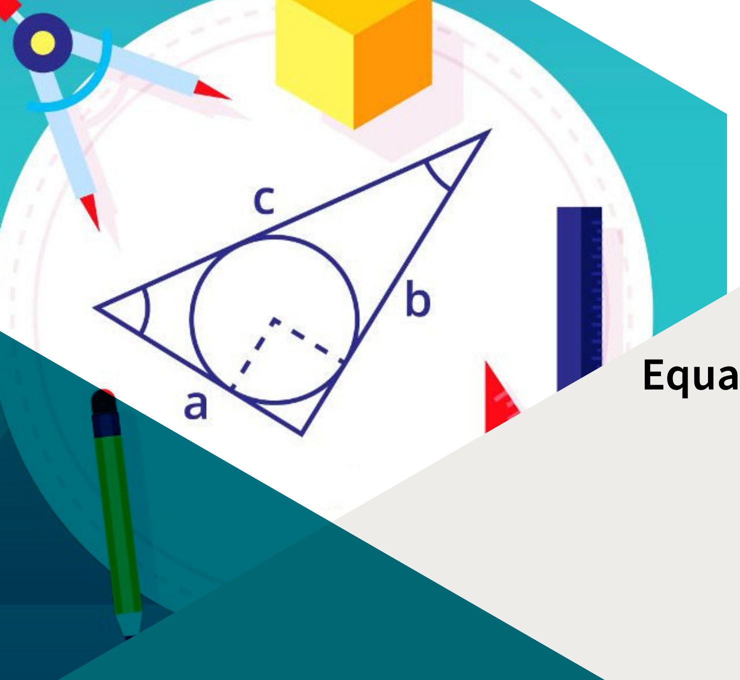

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS APLICADAS

Equações Lineares de 2ª Ordem

Soluções

Karla Lima

Sumário

Solução Geral e o Wronskiano

Conjunto Fundamental de Soluções

- Vamos agora focar nas Equações Diferenciais de Ordem 2 do tipo

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{1}$$

Conjunto Fundamental de Soluções

- Vamos agora focar nas Equações Diferenciais de Ordem 2 do tipo

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{1}$$

- Fixando $n = 2$, vimos na aula anterior que:

  Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ são soluções da equação homogênea (1) de ordem 2 em I, então a combinação linear

  $$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x),$$

  onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias, é também uma solução em I.

Conjunto Fundamental de Soluções

- **PERGUNTA:** Será que todas as soluções de (1) podem ser escritas como uma combinação linear de y_1 e y_2 ou algumas soluções têm uma forma totalmente diferente?

Conjunto Fundamental de Soluções

Definição 1

Dizemos que duas soluções y_1 e y_2 *formam um conjunto fundamental de soluções de*

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0.$$

se qualquer solução dessa equação diferencial pode ser expressa como uma combinação linear de y_1 e y_2.

Teorema da Solução Geral

Teorema 1

Se p e q são funções contínuas no intervalo aberto $I = (a, b)$ e se y_1 e y_2 são duas soluções da equação diferencial linear homogênea:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{1}$$

satisfazendo

$$W(y_1, y_2)(x_0) = y_1(x_0)y_2'(x_0) - y_1'(x_0)y_2(x_0) \neq 0$$

para algum ponto $x_0 \in I$, então qualquer outra solução de (1) no intervalo I pode ser escrito unicamente da forma

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2.$$

Teorema da Solução Geral

A expressão $y = c_1y_1 + c_2y_2$ é chamado de **solução geral** da equação diferencial linear de segunda ordem homogênea.

Demonstração

- **Ideia Geral:** As funções p e q são contínuas no intervalo aberto $I = (a, b)$. Isso garante que o **Teorema de Existência e Unicidade** se aplica a **Problemas de Valor Inicial** com essa equação.

Demonstração

- **Ideia Geral:** As funções p e q são contínuas no intervalo aberto $I = (a, b)$. Isso garante que o **Teorema de Existência e Unicidade** se aplica a **Problemas de Valor Inicial** com essa equação.
  - Portanto, considere $z(x)$ como outra solução da equação (1) no intervalo I, com as seguintes condições iniciais:

$$\begin{cases} z(x_0) = z_0 \\ z'(x_0) = z'_0 \end{cases}$$

Demonstração

- **Ideia Geral:** As funções p e q são contínuas no intervalo aberto $I = (a, b)$. Isso garante que o **Teorema de Existência e Unicidade** se aplica a **Problemas de Valor Inicial** com essa equação.
  - Portanto, considere $z(x)$ como outra solução da equação (1) no intervalo I, com as seguintes condições iniciais:
$$\begin{cases} z(x_0) = z_0 \\ z'(x_0) = z'_0 \end{cases}$$
  - Para um valor fixo $x_0 \in I$, essa solução é única.

Demonstração

- **Ideia Geral:** As funções p e q são contínuas no intervalo aberto $I = (a, b)$. Isso garante que o **Teorema de Existência e Unicidade** se aplica a **Problemas de Valor Inicial** com essa equação.
  - Portanto, considere $z(x)$ como outra solução da equação (1) no intervalo I, com as seguintes condições iniciais:
  $$\begin{cases} z(x_0) = z_0 \\ z'(x_0) = z'_0 \end{cases}$$
  - Para um valor fixo $x_0 \in I$, essa solução é única.
  - Em outras palavras, **não existe outra solução** de (1) que passe pelo ponto (x_0, z_0) e tenha a mesma inclinação z'_0 em x_0.

Demonstração

- Nosso objetivo é mostrar que existe uma solução da forma $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ que satisfaz o seguinte sistema de condições iniciais:

$$\begin{cases} y(x_0) = z_0 \\ y'(x_0) = z_0' \end{cases}$$

Demonstração

- Nosso objetivo é mostrar que existe uma solução da forma $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ que satisfaz o seguinte sistema de condições iniciais:

$$\begin{cases} y(x_0) = z_0 \\ y'(x_0) = z'_0 \end{cases}$$

- Como resultado da unicidade da solução, podemos concluir que $z(x)$ deve coincidir com essa solução em I.

Demonstração

- Nosso objetivo é mostrar que existe uma solução da forma $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ que satisfaz o seguinte sistema de condições iniciais:

$$\begin{cases} y(x_0) = z_0 \\ y'(x_0) = z'_0 \end{cases}$$

- Como resultado da unicidade da solução, podemos concluir que $z(x)$ deve coincidir com essa solução em I.
- Portanto, $z(x)$ deve ser da forma $c_1 y_1 + c_2 y_2$, não podendo ser representada de maneira diferente da combinação linear proposta.

Demonstração

- **Como resolver**

  Verifique se o seguinte sistema possui solução:

$$\begin{cases} y(x_0) = c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = z_0 \\ y'(x_0) = c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) = z_0' \end{cases}$$

Demonstração

- **Como resolver**

  Verifique se o seguinte sistema possui solução:

$$\begin{cases} y(x_0) = c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = z_0 \\ y'(x_0) = c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) = z_0' \end{cases}$$

- **Demonstração formal:** Consulte o material em Equações Diferenciais - Licenciatura em Matemática UFBA, página 83.

Exercícios

Exercício 1

Considere a equação diferencial

$$2x^2y'' + 3xy' - y = 0, \; x > 0.$$

Mostre que as funções $y_1 = x^{1/2}$ e $y_2 = x^{-1}$ *formam um conjunto fundamental de soluções e escreva a solução geral.*

Wronskiano: Fórmula de Abel

Teorema 2

Sejam p e q funções contínuas em um intervalo (a, b). Sejam y_1 e y_2 soluções da equação diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{1}$$

Então o Wronskiano $W(y_1, y_2)(x)$ é dado pela fórmula

$$W(y_1, y_2)(x) = ce^{-\int p(x)dx}.$$

Demonstração

- **Como resolver**
  - Como $W(y_1, y_2)(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)$, temos que

$$\begin{aligned} W'(y_1, y_2)(x) &= y_1'(x)y_2'(x) + y_1(x)y_2''(x) - y_1''(x)y_2(x) - y_1'(x)y_2'(x) \\ &= y_1(x)y_2''(x) - y_1''(x)y_2(x). \end{aligned} \quad \text{(I)}$$

Demonstração

- **Como resolver**
  - Como $W(y_1, y_2)(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)$, temos que

$$\begin{aligned} W'(y_1, y_2)(x) &= y_1'(x)y_2'(x) + y_1(x)y_2''(x) - y_1''(x)y_2(x) - y_1'(x)y_2'(x) \\ &= y_1(x)y_2''(x) - y_1''(x)y_2(x). \end{aligned} \tag{I}$$

  - Como y_1 e y_2 são soluções da equação diferencial dada, podemos reescrever

$$\begin{aligned} y_1'' &= -p(x)y_1' - q(x)y_1 \\ y_2'' &= -p(x)y_2' - q(x)y_2 \end{aligned} \tag{II}$$

Demonstração

- Substituindo (II) na expressão (I) de W', obtemos:

$$W' = -p(x)W$$

cuja solução é 0 ou $ce^{-\int p(x)dx}$, $c \neq 0$. Tomando $c \in \mathbb{R}$, podemos escrever

$$W(y_1, y_2)(x) = ce^{-\int p(x)dx}.$$

Demonstração

- Substituindo (II) na expressão (I) de W', obtemos:

$$W' = -p(x)W$$

cuja solução é 0 ou $ce^{-\int p(x)dx}$, $c \neq 0$. Tomando $c \in \mathbb{R}$, podemos escrever

$$W(y_1, y_2)(x) = ce^{-\int p(x)dx}.$$

- **Demonstração formal:** Consulte o material em Equações Diferenciais - Licenciatura em Matemática UFBA, página 87.

Teorema do Wronskiano

A fórmula de Abel nos ajuda a provar o seguinte teorema:

Teorema 3

Se y_1 e y_2 são soluções da equação diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{1}$$

então seu Wronskiano $W(y_1, y_2)(x)$ é:

$$W(y_1, y_2)(x) \equiv 0, \ \forall x \in (a, b)$$

ou

$$W(y_1, y_2)(x) \neq 0, \ \forall x \in (a, b)$$

Demonstração

Exercício 2

Demonstre o Teorema 3.

Resumo

Conjunto fundamental de soluções, wronskianos e independência linear: sejam y_1 e y_2 soluções da equação homogênea 1.

As seguintes quatro afirmações são equivalente:

- As funções y_1 e y_2 formam um **conjunto fundamental de soluções** no intervalo I.
- As funções y_1 e y_2 são **linearmente independentes** em I.
- $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$, para algum $x_0 \in I$.
- $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$, para todo $x \in I$.

O Método de Redução de Ordem

O Método

- Converte uma equação diferencial linear para uma equação diferencial linear de ordem inferior;
- Constrói a solução geral da equação diferencial original usando a solução geral da equação de inferior.

EDO Homogênea de 2ª Ordem

- Diferentemente das EDOs Homogêneas de 1ª Ordem, não existe um método geral para encontrar estas soluções LI da equação diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{1}$$

no seu caso geral.

EDO Homogênea de 2ª Ordem

- Diferentemente das EDOs Homogêneas de 1ª Ordem, não existe um método geral para encontrar estas soluções LI da equação diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{1}$$

  no seu caso geral.
- No entanto, se conhecemos um das soluções y_1 da equação 1, temos alguns métodos para encontrar uma segunda solução y_2 de modo que o conjunto $\{y_1, y_2\}$ seja um conjunto fundamental de soluções.

Método 1: Usando a Fórmula de Abel

Vimos que podemos escrever o Wronskiano de duas maneiras:

- Pela definição: $W(y_1, y_2)(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)$;
- Pela Fórmula de Abel: $W(y_1, y_2)(x) = ce^{-\int p(x)dx}$

Conhecendo quem é y_1, e igualando as fórmulas acima, obtemos uma EDO linear de 1ª ordem:

$$y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) = ce^{-\int p(x)dx},$$

que podemos resolver.

Método 1: Exemplo

Vamos aplicar este procedimento no seguinte exemplo:

Exemplo 1

Seja $y_1 = x$ *uma solução da equação diferencial homogênea de* 2^a *ordem*

$$x^2y'' + xy' - y = 0, \; x > 0.$$

Encontre a sua solução geral.

Método 1:Exercício

Exercício 3

Seja $y_1 = x^{-1}$ *uma solução da equação diferencial homogênea de* 2^a *ordem*

$$x^2y'' + 3xy' - y = 0, \; x > 0.$$

Encontre a sua solução geral.

Método 2: D'Alembert

- Lembrando que queremos encontrar duas soluções y_1 e y_2 que sejam linearmente independentes. Logo, devemos ter

$$\frac{y_2(x)}{y_1(x)} \neq \text{constante.}$$

Método 2: D'Alembert

- Lembrando que queremos encontrar duas soluções y_1 e y_2 que sejam linearmente independentes. Logo, devemos ter

$$\frac{y_2(x)}{y_1(x)} \neq \text{constante}.$$

- Daí, existe uma função $v(x)$ tal que $v(x) = \dfrac{y_2(x)}{y_1(x)}$ e a solução y_2 será escrita na forma:

$$y_2(x) = v(x)y_1(x).$$

- Devemos determinar $v(x)$ de tal forma que $y_2 = vy_1$ seja solução da equação (1).

Método 2: Exemplo

Vamos aplicar este procedimento no seguinte exemplo:

Exemplo 2

Seja $y_1 = x$ *uma solução da equação diferencial homogênea de* 2^a *ordem*

$$x^2y'' + xy' - y = 0, \; x > 0.$$

Encontre a sua solução geral.

Método 1:Exercício

Exercício 4

Seja $y_1 = e^x$ *uma solução da equação diferencial homogênea de* 2^a *ordem*

$$(x-1)y'' - xy' + y = 0,\ x > 1.$$

Encontre a sua solução geral.

Lista de Exercícios

Lista de Exercícios

Resolver as seções 2.2.3 e 2.3.3 do material Equações Diferenciais - Licenciatura em Matemática UFBA.