Listas de Exercícios P1

11 de setembro de 2025

Observação: O gabarito das questões encontra-se ao final do livro-texto. Os exercícios apresentados aqui mantêm a mesma numeração da obra original, na respectiva seção indicada, de modo a facilitar a consulta.

1 Seção 4.1 - Álgebra Linear com Aplicações (Howard Anton and Chris Rorres)

1. Seja V o conjunto de todos os pares ordenados de números reais e considere as operações de adição e multiplicação por escalar definidas em $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ por

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1,\, u_2 + v_2), \quad a\mathbf{u} = (0,\, au_2).$$

   (a) Calcule $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ e $a\mathbf{u}$, com $\mathbf{u} = (-1, 2)$, $\mathbf{v} = (3, 4)$ e $a = 3$.
   (b) Explique por que V é fechado na adição e multiplicação por escalar.
   (c) Como a adição de V é a operação de adição padrão de $\mathbb{R}^2$, certos axiomas de espaço vetorial valem para V por valerem em $\mathbb{R}^2$. Quais são esses axiomas?
   (d) Mostre que valem os Axiomas 7, 8 e 9.
   (e) Mostre que o Axioma 10 falha e que, portanto, V não é um espaço vetorial com as operações dadas.

Nos Exercícios 4, 5, 7, 9 e 10 , determine se o conjunto equipado com as operações dadas é um espaço vetorial. Para os que não são espaços vetoriais, identifique os axiomas que falham.

4. O conjunto de todos os pares de números reais da forma $(x, 0)$ com as operações padrão de $\mathbb{R}^2$.
5. O conjunto de todos os pares de números reais da forma (x, y), em que $x \geq 0$, com as operações padrão de $\mathbb{R}^2$.
7. O conjunto de todos os ternos de números reais com a operação padrão de adição, mas com multiplicação por escalar definida por

$$a(x, y, z) = (a^2x,\, a^2y,\, a^2z).$$

9. O conjunto de todas as matrizes 2×2 da forma

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

   com as operações matriciais padrão de adição e multiplicação por escalar.

10. O conjunto de todas as funções reais f definidas em cada ponto da reta real e tais que $f(1) = 0$, com as operações padrão do espaço $\mathcal{F}(-\infty, \infty)$.

23. O argumento a seguir prova que se $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ forem vetores num espaço vetorial V tais que

$$\mathbf{u} + \mathbf{w} = \mathbf{v} + \mathbf{w},$$

então $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ (a *lei de cancelamento* para a adição vetorial). Conforme exemplificado, justifique os passos dados preenchendo as lacunas.

$\mathbf{u} + \mathbf{w} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$	Hipótese
$(\mathbf{u} + \mathbf{w}) + (-\mathbf{w}) = (\mathbf{v} + \mathbf{w}) + (-\mathbf{w})$	Somar $-\mathbf{w}$ a ambos os lados
$\mathbf{u} + [\mathbf{w} + (-\mathbf{w})] = \mathbf{v} + [\mathbf{w} + (-\mathbf{w})]$	-------------
$\mathbf{u} + \mathbf{0} = \mathbf{v} + \mathbf{0}$	-------------
$\mathbf{u} = \mathbf{v}$	-------------

Exercícios de Verdadeiro/Falso:

Nas partes (a)–(e), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) Um vetor é um segmento de reta orientado (seta).
(b) Um vetor é uma enúpula de números reais.
(c) Um vetor é um elemento qualquer num espaço vetorial.
(d) Existe um espaço vetorial consistindo em exatamente dois vetores distintos.
(e) O conjunto de polinômios de grau exatamente 1 é um espaço vetorial com as operações definidas padrão dos polinômios.

2 Seção 4.2 - Álgebra Linear com Aplicações (Howard Anton and Chris Rorres)

1. Determine quais dos seguintes são subsespaços de $\mathbb{R}^4$.

   (a) Todos os vetores da forma $(a, 0, 0)$.
   (b) Todos os vetores da forma $(a, 1, 1)$.
   (c) Todos os vetores da forma (a, b, c), com $b = a + c$.
   (d) Todos os vetores da forma (a, b, c), com $b = a + c + 1$.
   (e) Todos os vetores da forma $(a, b, 0)$.

3. Determine quais dos seguintes são subsespaços de P_3.

   (a) Todos os polinômios $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, com $a_0 = 0$.

(b) Todos os polinômios $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, com $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0$.

(c) Todos os polinômios $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, em que a_0, a_1, a_2 são inteiros.

(d) Todos os polinômios da forma $a_0 + a_1x$, em que a_0 e a_1 são números reais.

7. Quais dos seguintes são combinações lineares de $\mathbf{u} = (0, -2, 2)$, $\mathbf{v} = (1, -1, 3)$ e $\mathbf{w} = (3, 2, 5)$.

   (a) $(2, 2, 2)$

   (b) $(3, 1, 5)$

   (c) $(0, 4, 5)$

   (d) $(0, 0, 0)$

11. Em cada parte, determine se os vetores dados geram $\mathbb{R}^3$.

   (a) $\mathbf{v_1} = (2, 2, 2)$, $\mathbf{v_2} = (0, 0, 3)$ e $\mathbf{v_3} = (0, 1, 1)$

   (b) $\mathbf{v_1} = (2, -1, 3)$, $\mathbf{v_2} = (4, 1, 2)$ e $\mathbf{v_3} = (8, -1, 8)$

Exercícios de Verdadeiro/Falso:

Nas partes (a)–(e), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

a) Cada subespaço de um espaço vetorial é, ele mesmo, um espaço vetorial.

b) Cada espaço vetorial é um subespaço de si mesmo.

c) Cada subconjunto de um espaço vetorial V que contenha o vetor nulo de V é um subespaço de V.

f) O gerado de qualquer conjunto finito de vetores em um espaço vetorial é fechado na adição e na multiplicação por escalar.

g) A interseção de dois subespaços quaisquer de um espaço vetorial V é um subespaço vetorial de V.

h) A união de dois subespaços quaisquer de um espaço vetorial V é um subespaço vetorial de V.

3 Seção 4.3 - Álgebra Linear com Aplicações (Howard Anton and Chris Rorres)

1. Explique por que o conjunto de vetores dados é linearmente independente:

   (a) $\{(-3, 0, 4), (5, -1, 2), (1, 1, 3)\}$

   (b) $\{6 - x^2, 1 + x + 4x^2\}$

   (c) $\{3 + x + x^2, 2 - x + 5x^2, 4 - 3x^2\}$

   (d) $\left\{ \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \right\}$

5. Suponha que $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$ e $\mathbf{v_3}$ sejam vetores em $\mathbb{R}^3$ com pontos iniciais na origem. Em cada parte, determine se os três vetores estão num mesmo plano.

(a) $\mathbf{v_1} = (2, -2, 0)$, $\mathbf{v_2} = (6, 1, 4)$ e $\mathbf{v_3} = (2, 0, 4)$

(b) $\mathbf{v_1} = (-6, 7, 2)$, $\mathbf{v_2} = (3, 2, 4)$ e $\mathbf{v_3} = (4, -1, 2)$

7. (a) Mostre que os três vetores $\mathbf{v_1} = (0, 3, 1, -1)$, $\mathbf{v_2} = (6, 0, 5, 1)$ e $\mathbf{v_3} = (4, -7, 1, 3)$ formam um conjunto linearmente dependente em $\mathbb{R}^4$.

15. Mostre que se $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$ for um conjunto linearmente independente e $\mathbf{v_3}$ não pertencer ao $ger\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}\}$, então $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$ é linearmente independente.

Exercícios Verdadeiro/Falso:

Nas partes (a)–(g), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) Um conjunto que consiste num único vetor é linearmente dependente.

(b) Dado qualquer escalar k, o conjunto de vetores $\{\mathbf{v},\ k\mathbf{v}\}$ é linearmente dependente.

(c) Cada conjunto linearmente dependente contém o vetor zero.

(d) Se o conjunto de vetores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ for linearmente independente, então, dado qualquer escalar não nulo k, o conjunto $\{k\mathbf{v}_1, k\mathbf{v}_2, k\mathbf{v}_3\}$ também é linearmente dependente.

(e) Se $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ forem vetores não nulos linearmente dependentes, então pelo menos um vetor $\mathbf{v}_k$ é uma combinação linear única de $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{k-1}$.

(f) O conjunto das matrizes 2×2 que contém exatamente dois 1 e dois 0 é linearmente independente em M_{22}.

(g) Os três polinômios $(x-1)(x+2)$, $x(x+2)$ e $x(x-1)$ são linearmente independentes.

4 Seção 4.4 - Álgebra Linear com Aplicações (Howard Anton and Chris Rorres)

3. Quais dos conjuntos de vetores dados são bases de $\mathbb{R}^3$?

(a) $\{(1, 0, 0), (2, 2, 0), (3, 3, 3)\}$

(c) $\{(2, -3, 1), (4, 1, 1), (0, -7, 1)\}$

5. Mostre que as matrizes dadas formam uma base de M_{22}:

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -6 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ -12 & -4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

7. Em cada parte, encontre o vetor de coordenadas de $\mathbf{w}$ em relação à base $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ de $\mathbb{R}^2$.

(a) $\mathbf{u}_1 = (1, 0)$, $\mathbf{u}_2 = (0, 1)$; $\mathbf{w} = (3, -7)$

(b) $\mathbf{u}_1 = (2, -4)$, $\mathbf{u}_2 = (3, 8)$; $\mathbf{w} = (1, 1)$

11. Encontre o vetor de coordenadas de A em relação à base $S = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}; \quad A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exercícios Verdadeiro/Falso

Nas partes (a)–(e), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) Se $V = \text{ger}\{v_1, \ldots, v_n\}$, então $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é uma base de V.

(b) Cada subconjunto linearmente independente de um espaço vetorial V é uma base de V.

(c) Se $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ for uma base de um espaço vetorial V, então cada vetor em V pode ser expresso como uma combinação linear de $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

(d) O vetor de coordenadas de um vetor $\mathbf{x}$ em $\mathbb{R}^n$ em relação à base canônica de $\mathbb{R}^n$ é $\mathbf{x}$.

(e) Cada base de P_4 contém pelo menos um polinômio de grau 3 ou menor.

5 Seção 4.5 - Álgebra Linear com Aplicações (Howard Anton and Chris Rorres)

7. Encontre bases dos seguintes subespaços de $\mathbb{R}^3$.

   (a) O plano $3x - 2y + 5z = 0$.

   (b) O plano $x - y = 0$.

   (c) A reta $x = 2t,\ y = -t,\ z = 4t$.

   (d) Todos os vetores da forma (a, b, c) com $b = a + c$.

9. Encontre a dimensão de cada um dos seguintes espaços vetoriais:

   (a) O espaço vetorial das matrizes $n \times n$ diagonais.

   (b) O espaço vetorial das matrizes $n \times n$ simétricas.

   (c) O espaço vetorial das matrizes $n \times n$ triangulares superiores.

13. Encontre vetores da base canônica de $\mathbb{R}^4$ que podem ser acrescentados ao conjunto $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$ para formar uma base de $\mathbb{R}^4$:

$$\mathbf{v_1} = (1, -4, 2, -3), \quad \mathbf{v_2} = (-3, 8, -4, 6)$$

Exercícios Verdadeiro/Falso

Nas partes (a)–(j), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

(a) O espaço vetorial nulo tem dimensão zero.

(b) Existe um conjunto de 17 vetores linearmente independentes em $\mathbb{R}^{17}$.

(c) Existe um conjunto de 11 vetores que gera $\mathbb{R}^{17}$.

(d) Cada conjunto linearmente independente de cinco vetores em $\mathbb{R}^5$ é uma base de $\mathbb{R}^5$.

(e) Cada conjunto de cinco vetores que gera $\mathbb{R}^5$ é uma base de $\mathbb{R}^5$.

(f) Cada conjunto de vetores que gera $\mathbb{R}^n$ contém alguma base de $\mathbb{R}^n$.

(g) Cada conjunto de vetores linearmente independente em $\mathbb{R}^n$ está contido em alguma base de $\mathbb{R}^n$.

(h) Existe alguma base de M_{22} consistindo em matrizes invertíveis.

(i) Se A tiver tamanho $n \times n$ e $I_n, A, A^2, \ldots, A^{n^2}$ forem matrizes distintas, então

$$\{I_n, A, A^2, \ldots, A^{n^2}\}$$

é linearmente independente.

(j) Existem pelo menos dois subespaços tridimensionais distintos de P^2.

6 Mudança de Base

Em breve!