Geometria Espacial

Aula 01: Revisão de Conceitos

Profª Dra. Karla Lima

Sumário

Noções Primitivas e Axiomas

Postulados

Os postulados apresentados na Geometria Plana podem ser utilizados como postulados da Geometria Espacial. Tome como exemplo:

Postulado 1: Existem infinitos pontos numa reta.

Postulado 2: Dados dois pontos distintos do espaço existe uma, e somente uma, reta que os contém.

Postulado 3: Dados três pontos não colineares do espaço, existe um, e somente um, plano que os contém.

Postulado 4: Se uma reta possui dois de seus pontos em um plano, ela está contida no plano.

Teorema 1

Uma vez estabelecidos os postulados, podemos utilizá-los na demonstração de outras propriedades:

> **Teorema 1.** Existe uma único plano que contém uma reta e um ponto não pertencente a ela.

Uma vez estabelecidos os postulados, podemos utilizá-los na demonstração de outras propriedades:

Teorema 1. Existe uma único plano que contém uma reta e um ponto não pertencente a ela.

Demonstração:

- Pelo Postulado 1, uma reta possui infinitos pontos distintos. Sejam P e Q dois deles.
- Seja R o ponto não pertencente à reta.
- Como P, Q e R são não colineares, pelo Postulado 3, existe um, e somente um, plano α que os contém.
- Pelo Postulado 4, como dois dos pontos da reta (a saber, P e Q) estão no plano α, segue que a reta está contida no mesmo plano.
- Portanto, o plano α é o único que contém a reta e o ponto fora dela.

Posição Relativa entre Duas Retas

- A partir das respostas às perguntas:

  "Como pode ser a interseção de duas retas distintas?"
  "Quando duas retas distintas determinam um plano?"

  obtemos uma importante classificação para um par de **retas distintas** no espaço.

- Pelo Postulado 2, duas retas distintas podem ter no máximo um ponto em comum.

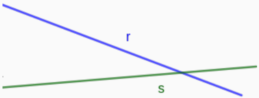
- Quando duas retas possuem mais de um ponto em comum elas são chamadas **coincidentes**; ou seja, são a mesma reta.

Posição Relativa entre Duas Retas

Dadas duas retas, elas podem:

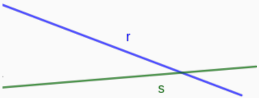
1. Ter exatamente um ponto em comum;
2. Ter mais de um ponto em comum, logo são a mesma reta (coincidentes);
3. Não ter pontos em comum.

Definição 1. Duas retas são ditas **concorrentes** se possuem exatamente um ponto em comum.

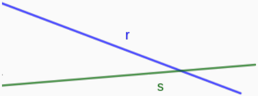


Elas são sempre coplanares?

Teorema 2. Duas retas concorrentes sempre determinam um plano.



Teorema 2. Duas retas concorrentes sempre determinam um plano.



Demonstração: Basta tomar o ponto em comum $P \in r, s$ e pontos $A \in r$ e $B \in s$ distintos de P.

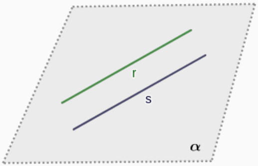
Os postulados 3 e 4 completam a demonstração.

O caso em que as retas são coincidentes não é particularmente interessante, pois elas correspondem à mesma reta. Isso implica que existem infinitos planos determinados por essas retas coincidentes, tornando a análise menos significativa.

Por isso, a classificação das posições relativas se dão entre duas retas distintas.

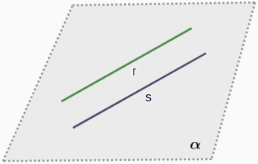
Considere o caso em que as retas **são coplanares**, mas **não possuem pontos de interseção**.

> **Definição 2.** Duas retas distintas são ditas **paralelas**, se são coplanares e não se interceptam.

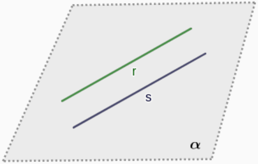


Posição Relativa entre Duas Retas

Teorema 3. Duas retas paralelas distintas estão contidas em um único plano.



Teorema 3. Duas retas paralelas distintas estão contidas em um único plano.



Demonstração:

- Como as duas retas são coplanares, existe um plano α contendo as duas retas.
- Tome dois, *A* e *B* pontos distintos na reta *r* e um ponto *C* na reta *s*.
- Logo, *A*, *B* e *C* são não coplanares, logo existe um único plano contendo esses três pontos.
- Pelo Postulado 4, *r* está contida em α.

- Pelo Postulado de Playfair:

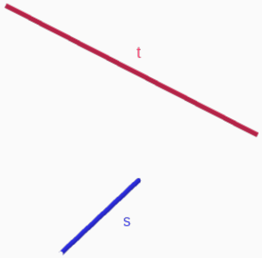
  Por um ponto não pertencente a uma reta r pode-se traçar uma única reta paralela à r.

- Assim, existe uma única reta paralela à r que passa pelo ponto C em α.
- Como s é paralela à r e $C \in s$, o plano que passa por r e s é único.

Posição Relativa entre Duas Retas

Por fim, o caso em que as retas não determinam um plano, logo não possuem ponto em comum.

Definição 4. Duas retas que não estão num mesmo plano chamam-se **retas reversas**.

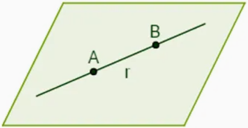


Duas **retas distintas** no espaço estão em um dos casos no quadro abaixo:

Posição relativa de *r* e *s*	**Interseção de *r* e *s***	***r* e *s* são coplanares?**
Concorrentes	Exatamente um ponto	Sim
Paralelas	Vazia	Sim
Reversas	Vazia	Não

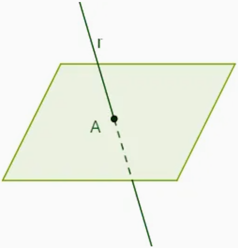
Como pode ser a interseção de uma reta *r* e um plano α?

- Pelo Postulado 4, se a reta e o plano tiverem 2 pontos em comum, a reta está contida no plano.

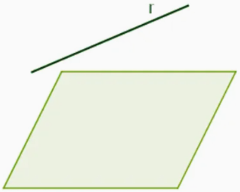


- O que acontece quando *r* e α possuem apenas um ponto em comum?
- E quando $r \cap \alpha = \emptyset$?

Definição 5. Dada uma reta *r* e um plano α no espaço, diz-se que *r* é **secante** a α quando *r* e α possuem apenas um ponto em comum.



Definição 6. Dada uma reta *r* e um plano α no espaço, diz-se que *r* é **paralela** a α quando *r* e α não possuem pontos em comum.



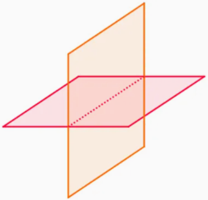
Uma reta e um plano no espaço estão em um dos casos no quadro abaixo:

Posição relativa de r e α	**Interseção de r e α**
r contida em α	A própria reta r
r secante a α	Um único ponto
r paralela a α	Vazia

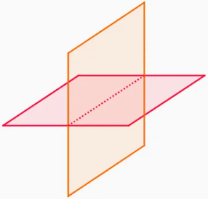
Definição 7. Se dois planos α e β possuem 3 três pontos não colineares em comum, dizemos que os planos são **coincidentes**.

Quanto à classificação, vamos nos concentrar em planos distintos, pois planos coincidentes não apresentam um interesse relevante para este contexto.

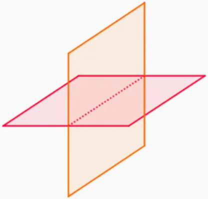
Definição 8. Se dois planos distintos α e β possuem mais de um ponto em comum, dizemos que os planos são **secantes**.



Teorema 4. A interseção entre dois planos secantes é uma reta.



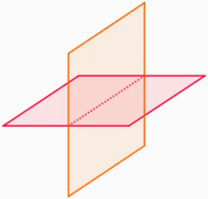
Teorema 4. A interseção entre dois planos secantes é uma reta.



Demonstração:

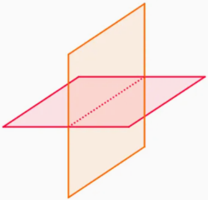
- α e β são planos secantes, logo possuem mais de um ponto em comum.
- Sejam P e Q os pontos em comum de α e β.
- Como são pontos distintos, determinam uma reta r.

Posição Relativa de Dois Planos



- Assim, *P* $\in \alpha$ e *Q* $\in \alpha$, de onde concluímos que *r* $\subset \alpha$.
- Analogamente, *P* $\in \beta$ e *Q* $\in \beta$, de onde concluímos que *r* $\subset \alpha$.
- Portanto, *r* $\subset \alpha \cap \beta$.
- Como concluímos que *r* $= \alpha \cap \beta$?

Posição Relativa de Dois Planos



- Suponha que exista um ponto $A \in \alpha \cap \beta$ que não pertence à reta r.
- Os pontos A, P e Q são não colineares e determinam um único plano.
- Como $A, P, Q \in \alpha$ e $A, P, Q \in \beta$, concluímos que $\alpha = \beta$, contrariando a hipótese de que os planos são distintos.
- Logo, todo ponto de $\alpha \cap \beta$ deve pertencer à reta e $\alpha \cap \beta \subset r$.

- Portanto,

$$r \subset \alpha \cap \beta \qquad \text{e} \qquad \alpha \cap \beta \subset r,$$

de onde segue que

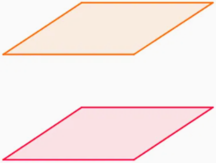
$$r = \alpha \cap \beta.$$

- **Podem dois planos distintos no espaço terem um único ponto em comum?**
- A resposta é não. Mas tal impossibilidade não decorre dos postulados estudados anteriormente, ou outro qualquer da Geometria Plana.
- A resposta é estabelecida através de mais um postulado:

  Postulado 5. Se dois planos no espaço[1] possuem um ponto em comum, então possuem pelo menos uma reta em comum.

[1] Na Geometria Euclidiana de dimensão superior a 3, é perfeitamente possível dois planos terem exatamente um ponto em comum.

Definição 9. Se dois planos distintos α e β não possuem pontos em comum, dizemos que os planos são **paralelos**.



Proposição 2. Dadas três retas distintas no espaço, r, s e t, se $r \parallel t$ e $s \parallel t$ então $r \parallel s$.

Proposição 3. Uma reta é paralela a um plano se e somente se ela é paralela a uma reta do plano.