

Elementos de Aritmética

Aula 04: Múltiplos de um Inteiro

Profª Dra. Karla Lima

- 1** **Propriedades das Operações**

- 2** **Múltiplos**

- 3** **Atividades de Aprofundamento**

Propriedades das Operações

Como vimos na descrição da reta numérica, podemos ordenar os números inteiros. Podemos reescrever a definição de ordem como a seguir:

Definição

*Dados $a, b \in \mathbb{Z}$, diz-se que a **é menor do que** b , e escreve-se $a < b$, para significar que existe algum $p \in \mathbb{Z}$ tal que $b = a + p$.*

Como vimos na descrição da reta numérica, podemos ordenar os números inteiros. Podemos reescrever a definição de ordem como a seguir:

Definição

*Dados $a, b \in \mathbb{Z}$, diz-se que a **é menor do que** b , e escreve-se $a < b$, para significar que existe algum $p \in \mathbb{Z}$ tal que $b = a + p$.*

Por exemplo,

$$-1 < 3,$$

pois

$$3 = -1 + 4.$$

Exercício

Use os sinais de $<$ e $>$ para cada um dos itens abaixo:

a) $0 \text{ ___ } - 1$

b) $-2 \text{ ___ } - 4$

c) $3 \text{ ___ } 8$

d) $-3 \text{ ___ } - 8$

e) $-2 \text{ ___ } 5$

f) $6 \text{ ___ } 0$

g) $0 \text{ ___ } - 6$

h) $-10 \text{ ___ } - 26$

A relação de ordem $a < b$ tem as seguintes propriedades:

- **Transitividade:** Se $a < b$ e $b < c$, então $a < c$.
- **Tricotomia:** Dados $a, b \in \mathbb{Z}$, exatamente uma das 3 alternativas seguintes a seguir:
 - ou $a = b$;
 - ou $a < b$ e existe $p \in \mathbb{Z}$ tal que $b = a + p$;
 - ou $b < a$ e existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $a = b + q$.

Proposição

São verdadeiras as seguintes afirmações:

a) Se $a < b$ e $c \in \mathbb{Z}$, então $a + c < b + c$.

b) Sobre a compatibilidade da multiplicação com a ordem:

- Se $a < b$ e $c > 0$, então $c \cdot a < b \cdot c$.
- Porém, se $c < 0$, $c \cdot a < b \cdot c$ não é verdade. O correto é: $c \cdot b < b \cdot a$, quando $a < b$ (o sinal inverte!).

Exercício

João, Maria, José e Carla estavam brincando com um jogo de tabuleiro que dura quatro rodadas e anotaram as pontuações de cada uma na Tabela 3.

	Rodada 1	Rodada 2	Rodada 3	Rodada 4
João	6	-4	-1	-2
Maria	-3	-3	-2	1
José	-2	-8	-4	5
Carla	5	-10	6	-4

Tabela: Pontuação em quatro rodadas.

Vence o jogo quem, após a soma das quatro rodadas, fizer menos pontos.
Determine:

- Qual a ordem crescente dos resultados?
- Qual a colocação de cada participante ao final do jogo?

Definição

Seja M um conjunto não vazio e \otimes uma operação entre elementos de M . Dizemos que \otimes é fechada se $a \otimes b$ pertencer a M sempre que a e b forem elementos de M .

Assim, você pode entender uma operação fechada em um conjunto M como uma “máquina” que transforma dois elementos de um conjunto M em um outro elemento de M .

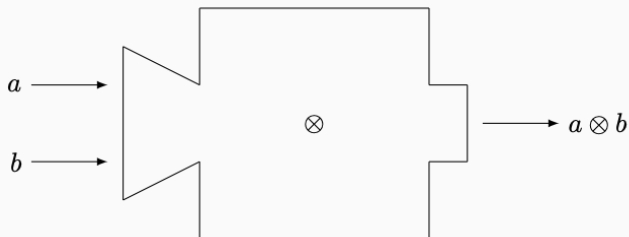
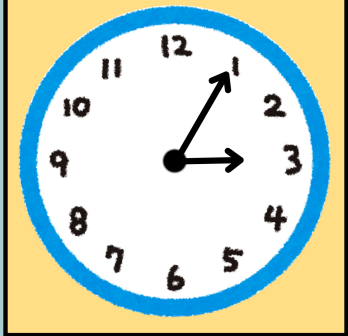


Figura: Entram a e b de M e sai um novo elemento ainda de M , o $a \otimes b$.

- As operações de **adição** e **multiplicação** são fechadas no conjunto dos números inteiros \mathbb{Z} .
- Ou seja, a soma de números inteiros ainda é um número inteiro; a multiplicação de números inteiros ainda é, também, um número inteiro.

Múltiplos de Números Inteiros

QUAL É A HORA?



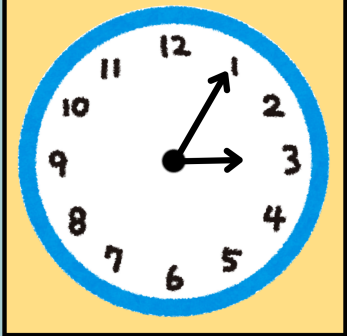
PONTEIRO MENOR: HORAS
PONTEIRO MAIOR: MINUTOS

QUAL É A HORA?



PONTEIRO MAIOR: CADA NÚMERO
INDICADO CORRESPONDE A 5 MINUTOS

QUAL É A HORA?



PONTEIRO MENOR: 3 HORAS
PONTEIRO MAIOR: (1 X 5) MINUTOS

QUAL É A HORA?



PONTEIRO MENOR: 3 HORAS
PONTEIRO MAIOR: (8 X 5) MINUTOS

- Multiplicando 5 por diferentes números inteiros, obtemos:

$$5 \cdot (-2) = -10, \quad 5 \cdot (-1) = -5, \quad 5 \cdot 0 = 0, \quad 5 \cdot 1 = 5, \\ 5 \cdot 2 = 10, \quad 5 \cdot 3 = 15, \quad 5 \cdot 4 = 20, \quad 5 \cdot 5 = 25, \quad \dots$$

- Dizemos que um número m é **múltiplo** do número inteiro 5 se ele pode ser escrito como

$$m = 5 \cdot p,$$

onde p é também um número inteiro.

- Portanto, os múltiplos de 5 são:

$$\{\dots, -15, -10, -5, 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, \dots\}.$$

Definição

Um número inteiro m é múltiplo de um número inteiro a se existir um número inteiro p tal que

$$m = a \cdot p.$$

Ou seja, os múltiplos de um número a podem ser encontrados multiplicando a por diferentes números inteiros.

Exemplo

Considere a tabela abaixo e escreva os múltiplos listados de:

a) -4

b) -3

c) -2

d) -1

e) 0

f) 1

g) 1

h) 2

i) 3

j) 4

\times	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
-4	16	12	8	4	0	-4	-8	-12	-16
-3	12	9	6	3	0	-3	-6	-9	-12
-2	8	6	4	2	0	-2	-4	-6	-8
-1	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
2	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8
3	-12	-9	-6	-3	0	3	6	9	12
4	-16	-8	-8	-8	0	4	8	12	16

- Como a tabela representa a multiplicação dos números de -4 a 4 entre si, os múltiplos estarão descritos em cada coluna (ou linha).
- Por exemplo, a coluna 1 lista os seguintes múltiplos de -4 : $\{-16, -12, -8, -4, 0, 4, 8, 12, 16\}$.

\times	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
-4	16	12	8	4	0	-4	-8	-12	-16
-3	12	9	6	3	0	-3	-6	-9	-12
-2	8	6	4	2	0	-2	-4	-6	-8
-1	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
2	-8	-6	-4	-2	0	2	4	6	8
3	-12	-9	-6	-3	0	3	6	9	12
4	-16	-8	-8	-8	0	4	8	12	16

Proposição 2

Agora vamos trabalhar com generalizações, sem explicitar os inteiros envolvidos.

Proposição

Sejam dados números inteiros a , b e c , tais que a e b são múltiplos de c . Mostre que $a + b$ também é múltiplo de c .

Proposição

Sejam dados números inteiros a , b e c , tais que a e b são múltiplos de c . Mostre que $a + b$ também é múltiplo de c .

Demonstração: De fato, se a e b são múltiplos de c , então existem inteiros p e q tais que:

$$a = c \cdot p \quad \text{e} \quad b = c \cdot q.$$

Assim,

$$\begin{aligned} a + b &= c \cdot p + c \cdot q \\ &= c \cdot (p + q) \quad \text{(pela propriedade distributiva)}. \end{aligned}$$

Demonstração: Proposição 2

$$\begin{aligned}
 a + b &= c \cdot p + c \cdot q \\
 &= c \cdot (p + q) \quad \text{(pela propriedade distributiva)}.
 \end{aligned}$$

Vimos que a soma de dois números inteiros ainda é um número inteiro, logo:

$$\begin{aligned}
 a + b &= c \cdot p + c \cdot q \\
 &= c \cdot (p + q) \\
 &= c \cdot m,
 \end{aligned}$$

onde $m = p + q \in \mathbb{Z}$.

Pela definição de múltiplo, concluímos que $a + b$ é múltiplo de c .

Atividades de Aprofundamento

Aprofunde o conhecimento:

- [Clique aqui para exercícios de aprofundamento.](#)
- [Clique aqui e pratique com jogos.](#)