

Elementos de Álgebra

Aula 12: Determinantes e Sistemas Lineares.

Profª Dra. Karla Lima

1. Determinantes e Compatibilidade de Sistemas
2. Sistemas Possíveis Indeterminados
3. Sistemas Lineares Homogêneos
4. Bibliografia

Um sistema linear

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

pode ser representado como uma equação matricial $AX=B$, onde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n \times 1}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}_{n \times 1}.$$

Teorema 1

Teorema

Seja S um sistema linear em que o número de equações é igual ao número de incógnitas (isto é, $m = n$). Nessas condições, A é matriz quadrada.

Se $\det(A) \neq 0$, então o sistema será possível e terá solução única $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$.

Teorema

Seja S um sistema linear em que o número de equações é igual ao número de incógnitas (isto é, $m = n$). Nessas condições, A é matriz quadrada.

Se $\det(A) \neq 0$, então o sistema será possível e terá solução única $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$.

Demonstração:

Existência: Como $\det(A) \neq 0$, a matriz A possui uma inversa A^{-1} , tal que

$$AX = B \Rightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B.$$

Portanto, $X = A^{-1}B$ é uma solução do sistema linear dado.

Unicidade: Suponha que exista outra solução Y do sistema, isto é, $AY = B$.

Então,

$$AY = B = AX \Rightarrow (A^{-1}A)Y = (A^{-1}A)X \Rightarrow Y = X,$$

de onde segue que a solução é única.

Exemplo

Verifique se os sistemas abaixo possuem solução única:

$$1. \begin{cases} x + y - 2z = 0, \\ -x + 4y - 3z = 1, \\ 2x + 2y + z = 2. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 5x - 2y + 3z = 2, \\ 3x + y + 4z = -1, \\ 4x - 3y + z = 3. \end{cases}$$

Exemplo

Discuta, segundo os valores de a , a compatibilidade do sistema

$$\begin{cases} ax + y = 1, \\ x + ay = 0. \end{cases}$$

Identifique os valores de a para os quais o sistema tem solução única e analise separadamente os casos excepcionais.

Exemplo

Discuta, segundo os valores de a e b , a compatibilidade do sistema

$$\begin{cases} x - y = 2, \\ 2x + ay = b. \end{cases}$$

Determine as condições sobre os parâmetros para que o sistema seja SPD, SPI ou SI.

Exemplo

Considere o sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ x - y + mz = 2, \\ mx + 2y + z = -1. \end{cases}$$

Discuta a compatibilidade do sistema em função de m . Faça o escalonamento para m genérico, identifique os valores de m que exigem análise separada e classifique o sistema em cada caso. Quando houver infinitas soluções, determine o conjunto solução.

O que é uma variável livre?

Ao escalonar um sistema, algumas variáveis podem ficar associadas a pivôs e outras não.

- **Variável básica:** corresponde a uma coluna com pivô na forma escalonada.
- **Variável livre:** corresponde a uma coluna sem pivô; pode receber um valor arbitrário.

Ideia principal

Escolhemos valores para as variáveis livres e usamos as equações para determinar as variáveis básicas.

A presença de uma variável livre em um sistema compatível indica que há infinitas soluções.

Considere o sistema linear:

$$\begin{cases} x + y - 3z = 0, \\ 4x - y + z = 0, \\ 2x - 3y + 7z = 0. \end{cases}$$

Uma forma escalonada equivalente é

$$\begin{cases} x + y - 3z = 0, \\ 5y - 13z = 0. \end{cases}$$

Temos três incógnitas, mas apenas duas equações independentes. Na forma escalonada, as colunas de x e y têm pivôs; a coluna de z não tem.

Como a coluna de z não tem pivô, escolhemos z como variável livre:

$$z = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Usando a segunda equação:

$$5y - 13z = 0 \implies 5y = 13\alpha \implies y = \frac{13}{5}\alpha.$$

Agora usamos a primeira equação para determinar x .

Substituímos $y = \frac{13}{5}\alpha$ e $z = \alpha$ na primeira equação:

$$x + y - 3z = 0.$$

Logo,

$$x + \frac{13}{5}\alpha - 3\alpha = 0 \implies x = \frac{2}{5}\alpha.$$

Assim, todas as variáveis ficam escritas em função do parâmetro α :

$$x = \frac{2}{5}\alpha, \quad y = \frac{13}{5}\alpha, \quad z = \alpha.$$

Escrevendo o conjunto solução

O conjunto solução é

$$(x, y, z) = \left(\frac{2}{5}\alpha, \frac{13}{5}\alpha, \alpha \right), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

- Se $\alpha = 0$, obtemos $(0, 0, 0)$, a solução nula.
- Se $\alpha \neq 0$, obtemos soluções não nulas.

Conclusão

O sistema é possível e indeterminado (SPI), pois possui uma variável livre e infinitas soluções.

1. Escalone o sistema.
2. Identifique as colunas com pivôs: suas variáveis são básicas.
3. As variáveis sem pivôs são livres.
4. Atribua parâmetros às variáveis livres.
5. Determine as variáveis básicas em função desses parâmetros.

Atenção: primeiro verifique se o sistema é compatível. Uma linha do tipo

$$0 = c, \quad c \neq 0,$$

indica que o sistema é impossível.

O que é um sistema linear homogêneo?

Um sistema linear é **homogêneo** quando todos os termos independentes são iguais a zero.

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Ideia central

Em cada equação, o segundo membro é zero.

A solução nula

Todo sistema linear homogêneo admite a solução

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = (0, 0, \dots, 0).$$

De fato, substituindo $x_i = 0$ em todas as equações, obtemos

$$a_{i1} \cdot 0 + a_{i2} \cdot 0 + \dots + a_{in} \cdot 0 = 0.$$

Terminologia

A solução $(0, 0, \dots, 0)$ é chamada **solução nula** ou **trivial**.

Consequência: todo sistema linear homogêneo é possível.

Classificação dos sistemas homogêneos

Um sistema linear homogêneo pode ser:

Sistema possível e determinado (SPD)

Possui uma única solução: a solução nula.

$$S = \{(0, 0, \dots, 0)\}.$$

Sistema possível e indeterminado (SPI)

Possui a solução nula e também soluções não nulas, chamadas **soluções próprias**.

Para decidir a classificação, podemos escalonar o sistema e identificar as variáveis livres.

Considere o sistema

$$S : \begin{cases} x - y + 2z = 0, \\ 2x + y - z = 0, \\ 3x - y + 4z = 0, \\ 5x - y + 6z = 0. \end{cases}$$

Uma forma escalonada equivalente é

$$S' : \begin{cases} x - y + 2z = 0, \\ 3y - 5z = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

Como há pivôs nas três variáveis, não há variáveis livres.

Exemplo 1: conclusão

Começamos pela última equação:

$$z = 0.$$

Substituindo na segunda equação:

$$3y - 5(0) = 0 \implies y = 0.$$

Substituindo na primeira:

$$x - 0 + 2(0) = 0 \implies x = 0.$$

Conclusão

A única solução é $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Portanto, o sistema é **SPD**.

Considere agora

$$S : \begin{cases} x + y - 3z = 0, \\ 4x - y + z = 0, \\ 2x - 3y + 7z = 0. \end{cases}$$

Uma forma escalonada equivalente é

$$S' : \begin{cases} x + y - 3z = 0, \\ 5y - 13z = 0. \end{cases}$$

Há três incógnitas e apenas duas equações independentes: uma variável pode ser livre.

Exemplo 2: parâmetro livre

Escolhemos z como variável livre e escrevemos

$$z = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Da segunda equação:

$$5y - 13\alpha = 0 \implies y = \frac{13}{5}\alpha.$$

Da primeira equação:

$$x + y - 3\alpha = 0 \implies x = 3\alpha - \frac{13}{5}\alpha = \frac{2}{5}\alpha.$$

Exemplo 2: conjunto solução

As soluções são

$$(x, y, z) = \left(\frac{2}{5}\alpha, \frac{13}{5}\alpha, \alpha \right), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Equivalentemente,

$$S = \left\{ \left(\frac{2\alpha}{5}, \frac{13\alpha}{5}, \alpha \right) : \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

Conclusão

Para $\alpha = 0$, obtemos a solução nula. Para $\alpha \neq 0$, obtemos soluções não nulas. Logo, o sistema é **SPI**.

Como reconhecer cada caso?

1. Escreva o sistema na forma homogênea: todos os termos independentes devem ser zero.
2. Escalone o sistema.
3. Observe as variáveis:
 - se todas as variáveis forem determinadas, a solução é apenas a nula: **SPD**;
 - se houver variável livre, surgem soluções não nulas: **SPI**.

Lembrete

Um sistema homogêneo nunca é impossível, pois sempre admite a solução nula.

Sem resolver completamente, indique se cada sistema é SPD ou SPI. Justifique sua previsão.

$$(a) \quad \begin{cases} x + y = 0, \\ x - y = 0 \end{cases} \quad (b) \quad \begin{cases} x + y + z = 0, \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$$

Pergunta: o que muda entre os dois sistemas em relação ao número de incógnitas e ao número de equações independentes?

- Um sistema linear homogêneo tem todos os termos independentes iguais a zero.
- A solução nula $(0, \dots, 0)$ sempre existe.
- Se a solução nula é a única, o sistema é SPD.
- Se existem soluções não nulas, o sistema é SPI.
- O escalonamento permite identificar pivôs e variáveis livres.

- Para as soluções dos exemplos anteriores, Clique Aqui!
- Livro texto: IEZZI, Gelson. Fundamentos de matemática elementar: sequências, matrizes, determinantes e sistemas. São Paulo,SP: Atual, 2004. 232 p.,