

Elementos de Álgebra

Aula 10: Sistemas Lineares. Escalonamento.

Profª Dra. Karla Lima

1. Resumo do que vimos
2. Sistema Lineares Escalonados
3. O Processo de Escalonamento
4. Bibliografia

Definição

Chamamos de **equação linear**, nas incógnitas $x_1, x_2, \dots, x_m$, toda equação da forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b,$$

onde $a_1, a_2, \dots, a_n, b$ são constantes reais dadas.

$a_1, a_2, \dots, a_n$ são chamados coeficientes das incógnitas

b é chamado termo independente da equação.

São equações lineares:

- $3x_1 + 4x_2 - 5x_3 - 7x_4 = 5$;
- $x_1 = 4$;
- $x + y = \sqrt{3}$.

Definição

Dada uma equação linear

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

*chamamos de **solução** uma n -upla $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ para a qual a sentença*

$$a_1\alpha_1 + a_2\alpha_2 + \cdots + a_n\alpha_n = b$$

é verdadeira.

A sequência $(0, 0, 1, -10)$ é uma solução da equação

$$3x_1 + 4x_2 - 5x_3 - x_4 = 5.$$

Com efeito,

$$3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 - 5 \cdot 1 - (-10) = -5 + 10 = 5.$$

Verifique que

$$\left(1, \frac{1}{2}, 0, 0\right)$$

também é uma solução da equação

$$3x_1 + 4x_2 - 5x_3 - x_4 = 5.$$

Definição

Um conjunto de m ($m \geq 1$) equações lineares, nas incógnitas $x_1, x_2, \dots, x_n$, é chamado de **sistema linear**:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Podemos representar o sistema acima como uma equação matricial, com

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n \times 1}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}_{n \times 1},$$

e

$$\boxed{AX = B}.$$

(a) O sistema linear

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4, \\ x - y = 2. \end{cases}$$

pode ser escrito na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

(b) O sistema linear

$$\begin{cases} 3x - y - z = 4, \\ 2x + 5y + 7z = 0 \end{cases}$$

pode ser escrito na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Definição

Analogamente, a solução de um sistema linear de n incógnitas é a n -upla $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ que satisfaz a todas as equações do sistema.

Por exemplo, $(1, 2, 3)$ é solução do sistema linear

$$\begin{cases} x + y + z = 6, \\ 2x + y - z = 1, \\ 3x - y + z = 4, \end{cases}$$

uma vez que

$$1 + 2 + 3 = 6,$$

$$2 \cdot 1 + 2 - 3 = 1,$$

e

$$3 \cdot 1 - 2 + 3 = 4.$$

Definição

- Dizemos que um sistema linear é **possível** se tiver pelo menos uma solução.
- Caso não tenha solução, dizemos que o sistema é **impossível**.
- Se o sistema possui uma única solução, dizemos que ele é **possível e determinado**.

Classificação dos Sistemas Lineares

O sistema do exemplo anterior é possível, pois possui pelo menos uma solução:
(1, 2, 3) é solução do sistema linear

$$\begin{cases} x + y + z = 6, \\ 2x + y - z = 1, \\ 3x - y + z = 4. \end{cases}$$

Já o sistema

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ x - y = 0, \\ 2x + 2y = 3 \end{cases}$$

é impossível, pois não possui solução.

De fato, da segunda equação, devemos ter

$$x - y + y = 0 + y \implies x = y.$$

Assim,

$$1 = x + y = x + x = 2x \implies \frac{1}{2} * 2x = \frac{1}{2} * 1 \implies x = \frac{1}{2}.$$

Por outro lado,

$$3 = 2x + 2y = 2x + 2x = 4x \implies \frac{1}{4} * 4x = \frac{1}{4} * 3 \implies x = \frac{3}{4}.$$

Portanto, não há (x, y) que satisfaça as 3 equações ao mesmo tempo.

Definição

Um sistema linear está na **forma escalonada** quando as seguintes condições são satisfeitas:

1. as equações nulas, se houver, estão abaixo das equações não nulas;
2. o primeiro coeficiente não nulo de cada equação está à direita do primeiro coeficiente não nulo da equação anterior;
3. todos os coeficientes abaixo de cada primeiro coeficiente não nulo são iguais a zero.

Definição

Em uma equação não nula de um sistema linear na forma escalonada, chamamos de **pivô** o primeiro coeficiente não nulo da equação.

Considere os seguintes sistemas lineares:

(i)

$$\left\{ \begin{array}{l} \boxed{x} + y + 3z = 1 \\ \boxed{y} - z = 4 \\ \boxed{2z} = 5 \end{array} \right.$$

Os primeiros coeficientes não nulos aparecem, sucessivamente, nas colunas de x , y e z . Além disso, os coeficientes abaixo de cada pivô são nulos.

$$(ii) \quad \begin{cases} \boxed{x} - 4y + z = 5, \\ \quad \boxed{2y} - z = 0. \end{cases}$$

O primeiro coeficiente não nulo da segunda equação está à direita do primeiro coeficiente não nulo da primeira equação.

$$(iii) \quad \begin{cases} \boxed{4x} - y + z + t + w = 1, \\ \quad \quad \quad \boxed{z} - t + w = 0, \\ \quad \quad \quad \quad \boxed{2t} - w = 1. \end{cases}$$

Neste caso, os pivôs estão nas colunas de x , z e t . A coluna de y não possui pivô.

Definição

Dizemos que dois sistemas lineares S_1 e S_2 são **equivalentes** quando possuem o mesmo conjunto de soluções.

Isso significa que toda solução de S_1 é solução de S_2 e toda solução de S_2 é solução de S_1 .

Os sistemas lineares

$$S_1 = \begin{cases} x + 2y = 3, \\ 2x + y = 1 \end{cases} \quad \text{e} \quad S_2 = \begin{cases} x + 2y = 3, \\ -3y = -5 \end{cases}$$

são equivalentes, pois ambos possuem solução única dada por

$$(x, y) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{5}{3} \right).$$

Observe que S_2 pode ser obtido de S_1 pela operação

$$L_2 \longrightarrow L_2 - 2L_1.$$

Teorema

Seja S um sistema linear com m equações e seja S' o sistema linear obtido ao:

- (i) multiplicar os membros de uma equação qualquer de S por um número não nulo k ;*
- (ii) substituir uma equação de S pela soma, membro a membro, dela com um múltiplo de outra equação de S ;*
- (iii) trocar duas linhas de S de posição.*

Nesses casos, S' é equivalente ao sistema linear S .

As operações descritas acima são as chamadas de **operações elementares** sobre as equações do sistema, que já conhecemos da teoria de matrizes.

O Processo de Escalonamento

O processo de escalonamento consiste em transformar um sistema linear em outro sistema equivalente, na forma escalonada, por meio de operações elementares.

Como funciona:

1. Colocamos como primeira equação uma equação cujo coeficiente da primeira incógnita seja diferente de zero.
 2. Usamos operações elementares para anular o coeficiente da primeira incógnita nas demais equações, utilizando a primeira equação.
 3. Deixamos de lado a primeira equação e aplicamos os 1º e 2º passos às equações restantes.
 4. Deixamos de lado as duas primeiras equações e aplicamos os 1º e 2º passos às equações restantes, e assim por diante, até que o sistema fique escalonado.
- **Um vídeo explicando o método do escalonamento: [Clique Aqui!](#)**

A Matriz Aumentada

Para realizar o escalonamento, podemos utilizar a **matriz aumentada** do sistema.

Definição

A matriz aumentada é formada pela matriz dos coeficientes e pela coluna dos termos independentes, separadas por uma linha vertical:

$$[A \mid B] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right],$$

onde

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{A - \text{matriz dos coeficientes}}, \quad \underbrace{\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}}_{B - \text{coluna dos termos independentes}}.$$

A Matriz Aumentada

Observação: Alterar uma linha da matriz aumentada corresponde a alterar a equação correspondente do sistema por meio de uma operação elementar.

Assim, trabalhar com as linhas da matriz aumentada é equivalente a trabalhar com as equações do sistema.

Considere o sistema linear

$$\begin{cases} x + 2y + z = 9, \\ 2x + y - z = 3, \\ 3x - y - 2z = -4. \end{cases}$$

Escalone o sistema e determine sua solução.

Escalone e resolva o sistema linear

$$\begin{cases} x + 4y = -8, \\ 3x - y = 15, \\ 10x - 12y = 7. \end{cases}$$

- Para as soluções dos exemplos anteriores, Clique Aqui!
- Livro texto: IEZZI, Gelson. Fundamentos de matemática elementar: sequências, matrizes, determinantes e sistemas. São Paulo,SP: Atual, 2004. 232 p.,