Elementos de Álgebra

Aula 07: Determinantes

Profª Dra. Karla Lima

Sumário

Determinante de uma Matriz

O Determinante de uma Matriz

- O **Determinante de uma Matriz** é uma função que associa a cada matriz quadrada um número escalar, com certas propriedades específicas.
- Denotamos por $det\,A$ ou $|A|$.
- O valor do determinante de uma matriz $A = [a_{11}]_{1\times 1}$ é definido como

$$det\,A = a_{11}.$$

- Para uma matriz $A_{2\times 2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, de ordem 2×2, escrevemos

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

- Seu valor é definido como

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21},$$

que é obtido multiplicando-se os dois elementos da diagonal principal (dos elementos a_{ii}) e depois subtraindo o produto dos dois elementos da diagonal secundária.

- Para uma matriz $A_{3\times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, de ordem 3×3, escrevemos

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

- Seu valor pode ser obtido por alguns métodos diferentes.

Visualização do Método de Sarrus

Passos:

1. Copie as duas primeiras colunas ao lado da matriz.
2. Some as diagonais principais (azul).
3. Subtraia as diagonais secundárias (vermelho).

Para aplicar o **método de Sarrus**, duplicamos as duas primeiras colunas à direita da matriz:

$$\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

Visualização do Método de Sarrus

Identificamos os elementos das diagonais principais:

$$\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

Somamos os produtos das diagonais principais (azuis):

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

Visualização do Método de Sarrus

Identificamos os elementos das diagonais secundárias:

$$\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

Subtraímos os produtos das diagonais secundárias (vermelhas):

$$-a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Portanto, o determinante é:

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Exemplo: Usando o Método de Sarrus, calcule o determinante da matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Solução:

Duplicamos as duas primeiras colunas de A:

$$\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 6 & 4 & 5 \\ 7 & 8 & 9 & 7 & 8 \end{array}$$

$$\det(A) = (1 \cdot 5 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 3 \cdot 4 \cdot 8) - (3 \cdot 5 \cdot 7 + 1 \cdot 6 \cdot 8 + 2 \cdot 4 \cdot 9)$$

$$\det(A) = (45 + 84 + 96) - (105 + 48 + 72) = 225 - 225 = 0$$

Resultado: A matriz é singular (determinante nulo).

Métodos

- O método de Sarrus é aplicável apenas a matrizes de ordem 3×3.
- Para um método manual mais geral, utiliza-se preferencialmente o método dos cofatores.
- Para um cálculo computacional mais eficiente, recomenda-se o método da redução por escalonamento.

Método	**Aplica-se a**	**Facilidade**	**Eficiência matrizes grandes**
Sarrus	Apenas 3×3	Alta	Não aplicável
Co-fatores	Qualquer ordem	Média	Baixa
Escalonamento	Qualquer ordem	Média/Alta	Alta

Tabela: Comparação entre métodos de cálculo de determinantes

Determinantes por Expansão em Co-fatores

Determinantes reduzidos e cofatores

Para qualquer matriz $[a_{ij}]_n \times n$, definimos o seguinte:

1. O **determinante reduzido** M_{ij} do elemento a_{ij} é o determinante da matriz $(n-1) \times (n-1)$ obtida excluindo a linha i e a coluna j de $[a_{ij}]_n \times n$.
2. O **cofator** A_{ij} do elemento a_{ij} é dado por $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Exemplo 1

Exemplo

Dada a matriz $A_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$*, vamos calcular os determinantes reduzidos* M_{31}*,* M_{32} *e* M_{33} *e os cofatores* A_{31}*,* A_{32} *e* A_{33}*.*

Exemplo 1

1. Determinante reduzido M_{31} e cofator A_{31}.

Temos que deletar a linha 3 e a coluna 1 da matriz A:

$$\begin{bmatrix} \cancel{3} & 1 & -2 \\ \cancel{2} & 4 & 1 \\ \cancel{3} & \cancel{0} & \cancel{5} \end{bmatrix}$$

Assim,

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - (-2) \cdot 4 = 9,$$

e, portanto, $A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = (-1)^4\, 9 = 9$.

Exemplo 1

2. Determinante reduzido M_{32} e cofator A_{32}.

Agora vamos deletar a linha 3 e a coluna 2 da matriz A:

$$\begin{bmatrix} 3 & \cancel{1} & -2 \\ 2 & \cancel{4} & 1 \\ \cancel{3} & \cancel{0} & \cancel{5} \end{bmatrix}$$

Assim,

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - (-2) \cdot 2 = 7,$$

e, portanto, $A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = (-1)^5\, 7 = -7$.

Exemplo 1

3. Determinante reduzido M_{33} e cofator A_{33}.

Por fim, temos que deletar a linha 3 e a coluna 3 da matriz A:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & \cancel{-2} \\ 2 & 4 & \cancel{1} \\ \cancel{3} & \cancel{0} & \cancel{5} \end{bmatrix}$$

Assim,

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - 1 \cdot 2 = 10,$$

e, portanto, $A_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = (-1)^6\, 10 = 10$.

Determinante de uma matriz $n \times n$

Para calcular o determinante de uma matriz quadrada de ordem $n > 2$, utilizamos o método dos cofatores, que reduz o problema ao cálculo de determinantes de submatrizes de ordem $(n-1) \times (n-1)$.

Vamos ilustrar o método com uma matriz A de ordem 3×3:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

1. Escolhemos uma linha da matriz (qualquer uma) para expandir o determinante. Para cada elemento dessa linha, calculamos o seu cofator correspondente.

Expansão do determinante por cofatores

2a. Se escolhermos a **linha 1**, devemos calcular os cofatores A_{11}, A_{12} e A_{13}. O determinante será:

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

2b. Se optarmos pela **linha 2**, usamos os cofatores A_{21}, A_{22} e A_{23}. A fórmula torna-se:

$$\det A = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}$$

2c. Para a **linha 3**, utilizamos os cofatores A_{31}, A_{32} e A_{33}:

$$\det A = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}$$

Observação: Não importa qual linha é escolhida — o valor final do determinante será o mesmo.

Exemplo 2

Exemplo

Vamos calcular o determinante da matriz $A_{3\times 3} = \begin{bmatrix} -7 & 2 & 3 \\ 9 & 1 & 4 \\ 6 & 0 & 5 \end{bmatrix}$.

Dica: na fórmula do determinante, multiplicamos o cofator pelo elemento correspondente da linha escolhida. Para fazer menos cálculos, escolha a linha da matriz que contenha mais zeros!

Neste caso, vamos escolher a linha 3. Então,

$$\begin{aligned} \det A &= 6 \cdot A_{31} + 0 \cdot A_{32} + 5 \cdot A_{33} \\ &= 6 \cdot A_{31} + 5 \cdot A_{33} \end{aligned}$$

e só precisamos calcular 2 cofatores e não 3.

Exemplo 2

Delete a linha 3 e a coluna 1 para obter:

$$\begin{bmatrix} \cancel{-7} & 2 & 3 \\ \cancel{9} & 1 & 4 \\ \cancel{6} & \cancel{0} & \cancel{5} \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} &= \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 2 \cdot 4 - 3 \cdot 1 = 5. \end{aligned}$$

Exemplo 2

Agora, delete a linha 3 e a coluna 3 para obter:

$$\begin{bmatrix} -7 & 2 & \cancel{3} \\ 9 & 1 & \cancel{4} \\ \cancel{6} & \cancel{0} & \cancel{5} \end{bmatrix}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} A_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} &= \begin{vmatrix} -7 & 2 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} \\ &= (-7) \cdot 1 - 2 \cdot 9 = -25. \end{aligned}$$

Exemplo 2

Portanto,

$$
\begin{aligned}
\det A &= 6 \cdot A_{31} + 0 \cdot A_{32} + 5 \cdot A_{33} \\
&= 6 \cdot A_{31} + 5 \cdot A_{33} \\
&= 6 \cdot 5 + 5 \cdot (-25) \\
&= -95.
\end{aligned}
$$

Observação

Em vez de escolher uma linha para calcular o determinante, podemos escolher uma coluna, o resultado será o mesmo.

No Exemplo 2, podemos escolher a coluna 2, que possui um zero, e o determinante seria dado pela expressão

$$\begin{aligned} \det A &= 2 \cdot A_{12} + 1 \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{23} \\ &= 2 \cdot A_{12} + 1 \cdot A_{22} \\ &= 2 \cdot (-21) + 1 \cdot (-53) \\ &= -95. \end{aligned}$$

Exemplo 3

Exemplo

Dada a matriz $B_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix}$*, escolher as linhas 1 ou 3 nos farão economizar o cálculo de 1 cofator, mas escolher a coluna 3 nos faz economizar o cálculo de 2 cofatores! Então, na hora de escolher, verifique qual linha ou coluna possui mais zeros.*

Portanto, usando a coluna 3, obtemos:

$$\begin{aligned} \det B &= 0 \cdot A_{13} + 1 \cdot A_{23} + 0 \cdot A_{33} \\ &= 1 \cdot A_{23} \\ &= (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} \\ &= -15. \end{aligned}$$