

Elementos de Álgebra

Aula 05: Matrizes invertíveis

Profª Dra. Karla Lima

1. Matrizes invertíveis
2. Método para Encontrar a Inversa
3. Bibliografia

Matrizes invertíveis

Definição

Definição

Seja A uma matriz quadrada de ordem n . Dizemos que A é **invertível** se existir uma matriz B tal que $AB = BA = I_n$.

Se A não é invertível, dizemos que A é uma matriz **singular**.

Teorema 1

Teorema

UNICIDADE: Se $A_{n \times n}$ é invertível, então é única a matriz $B_{n \times n}$ tal que $AB = BA = I_n$.

Teorema

UNICIDADE: Se $A_{n \times n}$ é invertível, então é única a matriz $B_{n \times n}$ tal que $AB = BA = I_n$.

Demonstração:

- Suponha que exista outra matriz C tal que $AC = CA = I_n$.
- Como $X = I_n X = X I_n$, para toda matriz $X_{n \times n}$, temos:

$$C = I_n C = (BA)C = B(AC) = B I_n = B,$$

e, portanto, C só pode ser a matriz B , mostrando a unicidade desejada.

Definição

Dada uma matriz invertível A , chama-se **inversa de A** a matriz A^{-1} (que é única) tal que $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

- **Exemplo 1:** A matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ é invertível e $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$.
- **Exemplo 2:** Mostre que a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ é singular.

Teorema

Além da unicidade, a matriz inversa possui as seguintes propriedades:

1. Se A e B são invertíveis, então

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

2. A inversa da inversa de uma matriz é a própria matriz:

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

3. A inversa da transposta é a transposta da inversa:

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

4. A inversa de uma matriz diagonal, cujas entradas na diagonal principal sejam todas não nulas, é a matriz diagonal dos inversos dos elementos diagonais.

Método para Encontrar a Inversa

Como encontrar a inversa de uma matriz?

Já sabemos que, se A é invertível, então:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

Como encontrar a inversa de uma matriz?

Já sabemos que, se A é invertível, então:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

Portanto, para encontrar A^{-1} , precisamos encontrar uma matriz que, quando multiplicada por A , produza a matriz identidade.

$$XA = I$$

Como encontrar a inversa de uma matriz?

Já sabemos que, se A é invertível, então:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

Portanto, para encontrar A^{-1} , precisamos encontrar uma matriz que, quando multiplicada por A , produza a matriz identidade.

$$\boxed{XA = I}$$

Como podemos transformar A em I ?

Operações elementares com linhas

Existem três **operações elementares** que podemos realizar sobre as linhas de uma matriz:

1. Trocar duas linhas:

$$L_i \leftrightarrow L_j$$

2. Multiplicar uma linha por um escalar não nulo:

$$L_i \leftarrow cL_i, \quad c \neq 0$$

3. Somar a uma linha um múltiplo de outra:

$$L_i \leftarrow L_i + cL_j$$

Operações elementares com linhas

Existem três **operações elementares** que podemos realizar sobre as linhas de uma matriz:

1. Trocar duas linhas:

$$L_i \leftrightarrow L_j$$

2. Multiplicar uma linha por um escalar não nulo:

$$L_i \leftarrow cL_i, \quad c \neq 0$$

3. Somar a uma linha um múltiplo de outra:

$$L_i \leftarrow L_i + cL_j$$

Essas operações permitem transformar uma matriz em outra matriz equivalente por linhas.

A matriz

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

representa a operação:

$$\boxed{L_1 \leftrightarrow L_2}.$$

Veja que

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ \pi & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

e suas linhas foram trocadas.

Exemplo de Matriz Elementar: Multiplicar uma linha

A matriz

$$E_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

representa a operação:

$$L_1 \leftarrow 2L_1.$$

Veja que

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ \pi & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ \pi & 0 \end{pmatrix}$$

e sua primeira linha foi multiplicada por 2.

Exemplo: soma de um múltiplo de uma linha

A matriz

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

representa a operação:

$$L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1.$$

Veja que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ \pi & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ \pi + 9 & 12 \end{pmatrix}$$

e sua segunda linha foi somada ao triplo da linha L_1 .

Operações elementares com linhas

Estas **operações elementares** possuem inversas, pois as operações que as desfazem são também operações elementares:

1. Trocar duas linhas:

$$L_i \leftrightarrow L_j$$

Inversa: voltar as linhas pra posição original

$$L_j \leftrightarrow L_i$$

2. Multiplicar uma linha por um escalar não nulo:

$$L_i \leftarrow cL_i, \quad c \neq 0$$

Inversa: Multiplicar a mesma linha pelo inverso de c

$$L_i \leftarrow \frac{1}{c}L_i, \quad c \neq 0$$

3. Somar a uma linha um múltiplo de outra:

$$L_i \leftarrow L_i + cL_j$$

Inversa: subtrair a mesma linha pelo múltiplo da outra

$$L_i \leftarrow L_i - cL_j$$

Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Podemos realizar operações elementares para transformá-la em uma matriz mais simples.

1. Trocar as linhas:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_1 \leftrightarrow L_2$$

2. A essa nova matriz, somar um múltiplo de uma linha a outra:

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_1 \leftarrow L_1 - 4L_2$$

3. A essa outra nova matriz, multiplicar uma linha por um escalar:

$$\begin{pmatrix} -1/5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_1 \leftarrow \frac{1}{-5} L_1$$

4. Por fim, novamente somamos um múltiplo de uma linha a outra:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$$

Note que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

Ou seja,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = A^{-1}.$$

O que acabamos de descobrir?

Partimos de

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

e, por meio de operações elementares, obtivemos:

$$E_4 E_3 E_2 E_1 A = I_2.$$

Como

$$A^{-1} A = I_2,$$

temos:

$$A^{-1} = E_4 E_3 E_2 E_1.$$

Portanto, as matrizes elementares correspondentes às operações que transformam A em I formam a matriz inversa.

No exemplo, encontramos:

$$A^{-1} = E_4 E_3 E_2 E_1.$$

Mas escrever e multiplicar todas essas matrizes elementares pode ser trabalhoso.

Podemos fazer algo mais simples:

aplicar as mesmas operações diretamente à matriz identidade.

Assim, trabalhamos simultaneamente com A e I :

$$\left[A \mid I \right].$$

Por que podemos fazer isso?

Suponha que as operações elementares sejam $E_1, E_2, \dots, E_k$.

Para transformar A em I , temos:

$$E_k \cdots E_2 E_1 A = I.$$

Mas já sabemos que:

$$E_k \cdots E_2 E_1 = A^{-1}.$$

Se aplicarmos as mesmas operações à identidade:

$$E_k \cdots E_2 E_1 I = A^{-1} I = A^{-1}.$$

Portanto:

$$\boxed{[A \mid I] \longrightarrow [I \mid A^{-1}]}.$$

Para encontrar A^{-1} :

1. Escrevemos a matriz aumentada:

$$\left[A \mid I \right].$$

2. Utilizamos operações elementares nas linhas para transformar A em I .
3. Aplicamos **as mesmas operações**, na mesma ordem, ao lado direito.
4. Quando o lado esquerdo se tornar I , o lado direito será A^{-1} :

$$\left[I \mid A^{-1} \right].$$

Aplicando o método

Para

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$

começamos com:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

Aplicando o método

Para

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$

começamos com:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

As operações que utilizamos anteriormente foram:

$$L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$L_1 \leftarrow L_1 - 4L_2$$

$$L_1 \leftarrow -\frac{1}{5}L_1$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1.$$

Aplicando o método

Para

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$

começamos com:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

As operações que utilizamos anteriormente foram:

$$L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$L_1 \leftarrow L_1 - 4L_2$$

$$L_1 \leftarrow -\frac{1}{5}L_1$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1.$$

Agora fazemos essas operações diretamente na matriz aumentada.

Aplicando o método

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - 4L_2} \left[\begin{array}{cc|cc} -5 & 0 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{L_1 \leftarrow -\frac{1}{5}L_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

Aplicando o método

Finalmente:

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1.$$

Portanto:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{array} \right].$$

Assim:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

Dada a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{pmatrix},$$

use a matriz aumentada

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

e encontre a inversa de A .

Exercício

Em um estacionamento, entre carros e motos, há 12 veículos, sendo a maioria carros. A diferença entre a quantidade de carros e o dobro da quantidade de motos é igual a 3.

Quantos carros e quantas motos há nesse estacionamento?

Vamos representar por:

x = quantidade de carros

y = quantidade de motos.

Do problema para a linguagem matemática

Se

x = quantidade de carros

y = quantidade de motos,

então, a partir das informações do problema:

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$$

Vocês ainda estudarão sistemas lineares com mais detalhes.

Por enquanto, vamos apenas observar como podemos escrever essas equações usando matrizes.

O sistema

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$$

pode ser escrito como:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

O sistema

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$$

pode ser escrito como:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Podemos escrever, de forma mais compacta:

$$AX = B.$$

Como podemos encontrar X ?

Usando a matriz inversa

Temos:

$$AX = B.$$

No exemplo 1, vimos que A é invertível. logo, podemos multiplicar os dois lados por A^{-1} :

$$A^{-1}AX = A^{-1}B.$$

Como

$$A^{-1}A = I,$$

obtemos:

$$IX = A^{-1}B.$$

Portanto:

$$\boxed{X = A^{-1}B}.$$

Voltando ao nosso exemplo

No exemplo anterior, calculamos:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Como

$$B = \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \end{pmatrix},$$

temos:

$$X = A^{-1}B.$$

Assim,

$$X = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}(12) + \frac{1}{3}(3) \\ \frac{1}{3}(12) - \frac{1}{3}(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Portanto:

$x = 9$	$y = 3$
---------	---------

$$X = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}(12) + \frac{1}{3}(3) \\ \frac{1}{3}(12) - \frac{1}{3}(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Portanto:

$$\boxed{x = 9 \quad y = 3}$$

9 carros e 3 motos.

A matriz inversa nos permitiu obter X a partir de $AX = B$.

Fechando a aula: o que aprendemos?

Hoje vimos que uma matriz quadrada A é **invertível** quando existe uma matriz A^{-1} tal que

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

Também vimos que:

- a matriz inversa, quando existe, é **única**;
- a matriz inversa pode ser utilizada para resolver uma equação matricial: se

$$AX = B$$

e A é invertível, então

$$X = A^{-1}B;$$

- as operações elementares nas linhas permitem encontrar a matriz inversa.

A ideia central do método

Para encontrar A^{-1} , utilizamos operações elementares para transformar A na matriz identidade:

$$A \longrightarrow I.$$

As mesmas operações realizadas sobre a identidade produzem a matriz inversa:

$$I \longrightarrow A^{-1}.$$

Por isso, na prática, utilizamos:

$$\boxed{[A \mid I] \longrightarrow [I \mid A^{-1}]}.$$

Transformar A em I é, ao mesmo tempo, transformar I em A^{-1} .

Para encontrar a inversa, utilizamos operações elementares:

$$[A \mid I] \longrightarrow [I \mid A^{-1}] .$$

Mas surge uma questão:

**Precisamos realizar todo esse processo
para descobrir que uma matriz não é invertível?**

**Existe uma maneira de saber, antes dos cálculos,
se uma matriz é invertível?**

Determinantes

Vamos investigar uma nova ferramenta que nos permitirá relacionar uma matriz com a possibilidade de ela ser invertível.

Como o determinante nos ajuda a responder essa pergunta?

Clique no texto para ter acesso aos arquivos PDFs:

- Livro texto: IEZZI, Gelson. Fundamentos de matemática elementar: sequências, matrizes, determinantes e sistemas. São Paulo,SP: Atual, 2004. 232 p.,
- José Roberto Bonjorno et. al., Prisma matemática : sistemas, matemática financeira e grandezas.