

Elementos de Álgebra

Aula 05: Matrizes Especiais.

Profª Dra. Karla Lima

1. Matriz Transposta

2. Matrizes Simétricas

3. Bibliografia

Matriz Transposta

Igualdade de Matrizes

Definição 1: Duas matrizes $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ são iguais se, e somente se:

- i. A ordem de A é igual à ordem de B ; ou seja, A e B possuem o mesmo número de linhas e o mesmo número de colunas;
- ii. $a_{ij} = b_{ij}$, para todo i e todo j .

Exemplo 1: Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 4 & z & 1 \end{pmatrix}$, então $A = B$ se

$$x = 3, \quad y = 2 \quad \text{e} \quad z = 5,$$

pois todas as outras entradas já são iguais.

Exemplo 2: Agora, se $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & x & y \\ 4 & z & -3 \end{pmatrix}$, então $A \neq B$, não importa os valores de x, y e z , pois

$$a_{11} = 1 \neq 2 = b_{11}$$

$$a_{23} = 1 \neq -3 = b_{23}.$$

Definição 2: Dada a matriz $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, com m linhas e n colunas, chama-se **transposta de A** a matriz $A^t = [b_{ij}]_{n \times m}$, com n linhas e m colunas, na qual:

- A 1ª coluna de A^t é formada pela 1ª linha de A ;
- A 2ª coluna de A^t é formada pela 2ª linha de A ;
- No geral, a j -ésima coluna de A^t é formada pela j -ésima linha de A e seus elementos são assim identificados:

$$b_{ij} = a_{ji}.$$

Exemplo 1:

a) Se $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ então $A^t = (2 \ 3)$

b) Se $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ então $B^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

c) Se $C = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ então $C^t = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

Teorema 1

Teorema 1:

a) Sejam A e B duas matrizes de ordem $m \times n$ e k um número real.

1. $(A^t)^t = A$;
2. $(A + B)^t = A^t + B^t$;
3. $(kA)^t = kA^t$;

b) Se $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{n \times p}$, então

$$(AB)^t = B^t A^t.$$

Teorema 1: Demonstração

1. Se $A = (a_{ij})$, então $A^t = (b_{ij})$, de modo que

$$b_{ij} = a_{ji}.$$

Por sua vez, $(A^t)^t = (c_{ij})$, logo

$$\begin{aligned} c_{ij} &= b_{ji} \\ &= a_{ij}. \end{aligned}$$

Como $a_{ij} = c_{ij}$, para todo $i = 1, \dots, m$ e todo $j = 1, \dots, n$, temos que

$$(A^t)^t = A,$$

como queríamos demonstrar.

Teorema 1: Demonstração

2. Se $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$, então $A + B = (c_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$.
Assim, $(A + B)^t = d_{ij}$, de modo que

$$d_{ij} = c_{ji} = a_{ji} + b_{ji}.$$

Por sua vez, $A^t = (a_{ji})$ e $B^t = (b_{ji})$, logo $A^t + B^t = (a_{ji} + b_{ji})$ e, como $d_{ij} = a_{ji} + b_{ji}$, para todo $i = 1, \dots, m$ e todo $j = 1, \dots, n$, temos que

$$(A + B)^t = A^t + B^t,$$

como queríamos demonstrar.

3. É de fácil demonstração, fica a cargo do leitor.

Teorema 1: Demonstração

4. Se $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{n \times p}$, então $AB = (c_{ij})$.
Temos que

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}.$$

Assim, $(AB)^t = d_{ij}$, de modo que

$$d_{ij} = c_{ji} = \sum_{k=1}^n a_{jk} b_{ki}.$$

Como $A = (a_{ij})_{m \times n}$ e $B = (b_{ij})_{n \times p}$, o produto AB é possível.
Temos que $A^t = (a_{ji})_{n \times m}$ e $B^t = (b_{ji})_{p \times n}$ e, a menos que $p = m$, só podemos efetuar o produto $B^t A^t = (d_{ij})_{p \times m}$, obtendo:

$$e_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{jk} b_{ki} = d_{ij},$$

para todo $i = 1, \dots, m$ e todo $j = 1, \dots, n$.
Portanto,

$$(AB)^t = B^t A^t,$$

como queríamos demonstrar.

Matrizes Simétricas

Definição 3: Chama-se **matriz simétrica** toda matriz **quadrada**, de ordem n , tal que:

$$A^t = A.$$

Decorre da definição que se A é simétrica, então $a_{ij} = a_{ji}$, para todo i e todo j .

Exemplo 2: São simétricas as seguintes matrizes:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & e & f & g \\ c & f & h & i \\ d & g & i & j \end{bmatrix}$$

Definição 4: Chama-se **matriz antissimétrica** toda matriz **quadrada**, de ordem n , tal que:

$$A^t = -A.$$

Decorre da definição que se A é simétrica, então $a_{ij} = -a_{ji}$, para todo i e todo j .

Exemplo 3: São antissimétricas as seguintes matrizes:

$$\begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & -0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{bmatrix}$$

Clique no texto para ter acesso aos arquivos PDFs:

- Livro texto: IEZZI, Gelson. Fundamentos de matemática elementar: sequências, matrizes, determinantes e sistemas. São Paulo,SP: Atual, 2004. 232 p.,
- José Roberto Bonjorno et. al., Prisma matemática : sistemas, matemática financeira e grandezas.