Elementos de Álgebra

Aula 03: Operações entre Matrizes

Profª Dra. Karla Lima

Sumário

Multiplicação - Motivação

Voltando ao Problema do Inventário

Nosso supermercado tinha 3 prateleiras com os seguintes produtos:

- Produto 1: Arroz
- Produto 2: Feijão
- Produto 3: Açúcar

A matriz de inventário, que representa a quantidade de cada produto em cada prateleira, era dada por:

$$S = \begin{bmatrix} 10 & 15 & 30 \\ 5 & 25 & 12 \\ 20 & 8 & 14 \end{bmatrix} \begin{array}{ll} \leftarrow & \text{Prateleira 1} \\ \leftarrow & \text{Prateleira 2} \\ \leftarrow & \text{Prateleira 3} \end{array}$$

Matriz de Inventário

$$S = \begin{bmatrix} 10 & 15 & 30 \\ 5 & 25 & 12 \\ 20 & 8 & 14 \end{bmatrix} \begin{array}{ll} \leftarrow & \text{Prateleira 1} \\ \leftarrow & \text{Prateleira 2} \\ \leftarrow & \text{Prateleira 3} \end{array}$$

Assim:

- A primeira linha representa a **prateleira 1**, com 10 pacotes de arroz, 15 pacotes de feijão, e 30 pacotes de açúcar.
- A segunda linha representa a **prateleira 2**, com 5 pacotes de arroz, 25 pacotes de feijão, e 12 pacotes de açúcar.
- A terceira linha representa a **prateleira 3**, com 20 pacotes de arroz, 8 pacotes de feijão, e 14 pacotes de açúcar.

Um Novo Problema de Inventário

Agora, digamos que o supermercado tenha recebido um novo lote de produtos, e o gerente quer atualizar o inventário, dobrando todas as quantidades, por exemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 \times 10 & 2 \times 15 & 2 \times 30 \\ 2 \times 5 & 2 \times 25 & 2 \times 12 \\ 2 \times 20 & 2 \times 8 & 2 \times 14 \end{pmatrix}$$

Usando a definição de multiplicação, temos que:

$$\begin{pmatrix} 2\times 10 & 2\times 15 & 2\times 30 \\ 2\times 5 & 2\times 25 & 2\times 12 \\ 2\times 20 & 2\times 8 & 2\times 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10+10 & 15+15 & 30+30 \\ 5+5 & 25+25 & 12+12 \\ 20+20 & 8+8 & 14+14 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 10 & 15 & 30 \\ 5 & 25 & 12 \\ 20 & 8 & 14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & 15 & 30 \\ 5 & 25 & 12 \\ 20 & 8 & 14 \end{pmatrix}$$

$$= 2S$$

Ou seja, multiplicando os elementos:

$$2S = \begin{pmatrix} 2 \times 10 & 2 \times 15 & 2 \times 30 \\ 2 \times 5 & 2 \times 25 & 2 \times 12 \\ 2 \times 20 & 2 \times 8 & 2 \times 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 30 & 60 \\ 10 & 50 & 24 \\ 40 & 16 & 28 \end{pmatrix}$$

Um Novo Problema de Inventário

Agora, a nova matriz $2S$ representa a quantidade de produtos após o novo lote ser adicionado, ou seja:

- Na prateleira 1, temos 20 pacotes de arroz, 30 pacotes de feijão, e 60 pacotes de açúcar.
- Na prateleira 2, temos 10 pacotes de arroz, 50 pacotes de feijão, e 24 pacotes de açúcar.
- Na prateleira 3, temos 40 pacotes de arroz, 16 pacotes de feijão, e 28 pacotes de açúcar.

Multiplicação por um Escalar

- Quando você multiplica uma matriz por um escalar, está basicamente ajustando todas as quantidades de uma vez.
- No caso, multiplicar por 2 dobrou a quantidade de cada produto em cada prateleira.
- Isso é útil quando você quer aumentar ou diminuir **proporcionalmente todas as quantidades de uma vez**, sem precisar atualizar cada elemento individualmente.

Exercício

Como ficaria a matriz de inventário se quisermos atualizar o inventário, triplicando todas as quantidades das prateleiras?

Exercício

Como ficaria a matriz de inventário se quisermos atualizar o inventário, triplicando todas as quantidades das prateleiras?

Multiplicando os elementos:

$$3S = \begin{pmatrix} 3 \times 10 & 3 \times 15 & 3 \times 30 \\ 3 \times 5 & 3 \times 25 & 3 \times 12 \\ 3 \times 20 & 3 \times 8 & 3 \times 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 45 & 90 \\ 15 & 75 & 36 \\ 60 & 24 & 42 \end{pmatrix}$$

Valor Total do Estoque

Agora, consideremos os preços dos produtos:

- Arroz: R$ $8,48$ por pacote
- Feijão: R$ $7,69$ por pacote
- Açúcar: R$ $4,69$ por pacote

Como calculamos o valor total em cada prateleira?

Valor Total do Estoque

Dada a matriz de inventário

$$S = \begin{bmatrix} 10 & 15 & 30 \\ 5 & 25 & 12 \\ 20 & 8 & 14 \end{bmatrix}$$

A primeira coluna representa a quantidade de **arroz** em cada prateleira:

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Valor Total do Estoque

Vamos multiplicar cada elemento dessa coluna pelo preço do arroz, que é **R$ 8**, **48**.

Ou seja, vamos calcular:

$$\text{R\$ em Arroz por Prateleira} = \begin{pmatrix} 10 \times 8,48 \\ 5 \times 8,48 \\ 20 \times 8,48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 84,8 \\ 42,4 \\ 169,6 \end{pmatrix}$$

Valor Total do Estoque

Agora, a segunda coluna de S representa a quantidade de **feijão** em cada prateleira:

$$\begin{pmatrix} 15 \\ 25 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Agora, a segunda coluna de S representa a quantidade de **feijão** em cada prateleira:

$$\begin{pmatrix} 15 \\ 25 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Vamos multiplicar cada elemento dessa coluna pelo preço do feijão, que é **R$ 7,69**.

Ou seja, vamos calcular:

$$\text{R\$ em Feijão por Prateleira} = \begin{pmatrix} 15 \times 7,69 \\ 25 \times 7,69 \\ 8 \times 7,69 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 115,35 \\ 192,25 \\ 61,52 \end{pmatrix}$$

Valor Total do Estoque

Por fim, a terceira coluna de S representa a quantidade de **açúcar** em cada prateleira:

$$\begin{pmatrix} 30 \\ 12 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Valor Total do Estoque

Por fim, a terceira coluna de *S* representa a quantidade de **açúcar** em cada prateleira:

$$\begin{pmatrix} 30 \\ 12 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Vamos multiplicar cada elemento dessa coluna pelo preço do açúcar, que é **R$ 4,69**.

Ou seja, vamos calcular:

$$\text{R\$ em Açucar por Prateleira} = \begin{pmatrix} 30 \times 4,69 \\ 12 \times 4,69 \\ 14 \times 4,69 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 140,70 \\ 56,28 \\ 65,66 \end{pmatrix}$$

Valor Total do Estoque

$$
\begin{aligned}
\text{R\$ no Estoque por Prateleira} &= \text{R\$ em Arroz por Prateleira} \\
&\quad + \text{R\$ em Feijão por Prateleira} \\
&\quad + \text{R\$ em Açucar por Prateleira} \\
&= \begin{pmatrix} 84,8 \\ 42,4 \\ 169,6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 115,35 \\ 192,25 \\ 61,52 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 140,70 \\ 56,28 \\ 65,66 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Valor Total do Estoque

$$\text{R\$ no Estoque por Prateleira} = \begin{pmatrix} 84,8 + 115,35 + 140,70 \\ 42,4 + 192,25 + 56,28 \\ 169,6 + 61,52 + 65,66 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 340,85 \\ 290,93 \\ 296,78 \end{pmatrix}$$

- Para calcular o valor total do estoque, só precisamos somar todas as linhas:

$$340,85 + 290,93 + 296,78 = 928,56$$

- Portanto, o valor total do estoque é de R$928, 56.

Recapitulando o que fizemos:

$$\text{R\$ no Estoque por Prateleira} = \begin{pmatrix} 10 \times 8,48 + 15 \times 7,69 + 30 \times 4,69 \\ 5 \times 8,48 + 25 \times 7,69 + 12 \times 4,69 \\ 20 \times 8,48 + 8 \times 7,69 + 14 \times 4,69 \end{pmatrix}$$

Você consegue ver um padrão nas linhas?

Multiplicação de Matrizes

1ª Coluna x 1ªLinha

2ª Coluna x 2ª Linha

$$\begin{bmatrix} 10 \times 8{,}48 + 15 \times 7{,}69 + 30 \times 4{,}69 \\ 5 \times 8{,}48 + 25 \times 7{,}69 + 12 \times 4{,}69 \\ 20 \times 8{,}48 + 8 \times 7{,}69 + 14 \times 4{,}69 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 10 & 15 & 30 \\ 5 & 25 & 12 \\ 20 & 8 & 14 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 8{,}48 \\ 7{,}69 \\ 4{,}69 \end{bmatrix}$$

3ª Coluna x 3ª Linha

Exercício

Após um ano, os preços dos produtos no supermercado sofreram um aumento. Os novos preços dos produtos passaram a ser os seguintes:

- *Arroz: R$ 8,90 por pacote*
- *Feijão: R$ 8,07 por pacote*
- *Açúcar: R$ 4,92 por pacote*

Dada a matriz de quantidades de produtos por prateleira, calcule o valor total do estoque utilizando a multiplicação de matrizes.

Multiplicação - Definições e Exemplos

Multiplicação por um Escalar - Definição

Definição

Multiplicar uma matriz por um número (escalar) k é multiplicar cada elemento da matriz em questão pelo dado escalar:

$$k \times \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \cdot a_{11} & k \cdot a_{12} \\ k \cdot a_{21} & k \cdot a_{22} \end{bmatrix}.$$

Em geral, escrevemos $k \times [a_{ij}] = [b_{ij}]$, *onde* $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$.

Exemplo

Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -9 \end{bmatrix}$ *e o escalar 7, o produto* $7 \times A$ *é dado por*

$$7 \times \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \cdot 3 & 7 \cdot (-1) & 7 \cdot 2 \\ 7 \cdot 0 & 7 \cdot 5 & 7 \cdot (-9) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 21 & -7 & 14 \\ 0 & 35 & -63 \end{bmatrix}.$$

OBS: Nas operações de soma e subtração, basta que a ordem das matrizes coincidam e podemos efetuá-las.

Já na multiplicação por um escalar, não há restrição, pode sempre ser efetuada.

- Esta operação não é direta como as anteriores.
- Ela está definida de modo a ter aplicações mais úteis do que simplesmente multiplicar cada entrada correspondente.
- A multiplicação de matrizes serve para diversas finalidades em álgebra linear, com aplicações em transformações lineares, teoria dos gráficos, equações diferenciais, física, estatísticas multivariadas, entre outras áreas.
- Ela permite representar e manipular sistemas de equações lineares de uma maneira compacta e eficiente.

Multiplicação de Matrizes

- Na multiplicação entre duas matrizes, $A \cdot B$, a condição de conformidade é que a dimensão da coluna de A (matriz "guia") deve ser igual à dimensão da linha de B (matriz "guiada").

$$[A]_{m \times n} \cdot [B]_{n \times p} = [C]_{m \times p}$$

#Colunas = #Linhas

Ordem da matriz resultante da multiplicação

Exemplo

Dadas as matrizes $A_{1\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}$ *e* $B_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 17 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$*, podemos efetuar o produto AB, pois*

$$A_{1\times 2} \qquad e \qquad B_{2\times 3},$$

mas não podemos efetuar o produto BA:

$$B_{2\times 3} \qquad e \qquad A_{1\times 2}.$$

Exercício

Considere as matrizes abaixo:

$$A_{1\times 2} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \quad , \quad B_{2\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0.5 & \pi & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Quais multiplicações podem ser efetuadas? No caso positivo, qual a ordem da matriz resultante?

a) $A \cdot B$

b) $A \cdot C$

c) $B \cdot A$

d) $B \cdot C$

e) $C \cdot A$

f) $C \cdot B$

Multiplicação de matrizes: o método

- Para ilustrar como obter a matriz $C = A \cdot B$, tomamos como exemplo as matrizes

$$A_{3\times 2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad B_{2\times 2} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}.$$

- Podemos efetuar o produto AB, uma vez que a dimensão da coluna de A é 2 que coincide com a dimensão da linha de B. A matriz produto $C = AB$ tem ordem 3×2.

Multiplicação de matrizes: o método

Queremos encontrar cada elemento c_{ij}, usando os valores de a_{ij} e b_{ij}:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}_{3x2} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}_{2x2} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{bmatrix}_{3x2}$$

Multiplicação de matrizes: o método

- Para obter c_{11}, usamos a 1ª linha de *A* e a 1ª coluna de *B*:

Multiplica

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}_{3\times2} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}_{2\times2} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{bmatrix}_{3\times2}$$

Multiplica

$$c_{11} = a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21}$$

Multiplicação de matrizes: o método

- Para obter c_{21}, usamos a 2ª linha de *A* e a 1ª coluna de *B*:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}_{3x2} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}_{2x2} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{bmatrix}_{3x2}$$

$$c_{21} = a_{21} b_{11} + a_{22} b_{21}$$

Multiplicação de matrizes: o método

- Para obter c_{31}, usamos a 3ª linha de *A* e a 1ª coluna de *B*:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ \boxed{a_{31} \quad a_{32}} \end{bmatrix}_{3x2} \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} b_{11} \\ b_{21} \end{matrix}} & \begin{matrix} b_{12} \\ b_{22} \end{matrix} \end{bmatrix}_{2x2} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{bmatrix}_{3x2}$$

$$c_{31} = a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21}$$

Multiplicação de matrizes: o método

- Para obter c_{12}, usamos a 1ª linha de A e a 2ª coluna de B:

$$\begin{bmatrix} \boxed{a_{11} \quad a_{12}} \\ a_{21} \quad a_{22} \\ a_{31} \quad a_{32} \end{bmatrix}_{3x2} \begin{bmatrix} b_{11} & \boxed{\begin{matrix} b_{12} \\ b_{22} \end{matrix}} \\ b_{21} & \end{bmatrix}_{2x2} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{bmatrix}_{3x2}$$

$$c_{12} = a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22}$$

Multiplicação de matrizes: o método

- Para obter c_{22}, usamos a 2ª linha de *A* e a 2ª coluna de *B*:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}_{3x2} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}_{2x2} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{bmatrix}_{3x2}$$

$$c_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}$$

Multiplicação de matrizes: o método

- Para obter c_{32}, usamos a 3ª linha de *A* e a 2ª coluna de *B*:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}_{3x2} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}_{2x2} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{bmatrix}_{3x2}$$

$$c_{32} = a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22}$$

Então, a matriz produto AB é dada por:

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \\ a_{31} \cdot b_{11} + a_{32} \cdot b_{21} & a_{31} \cdot b_{12} + a_{32} \cdot b_{22} \end{bmatrix}$$

Exemplo

Exemplo

Dadas as matrizes $A_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ *e* $B_{2\times 1} = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \end{bmatrix}$*, o produto AB está definido, pois a dimensão da coluna de A,* $n = 2$*, coincide com a dimensão da linha de B,* $m = 2$*. A matriz* $AB = [c_{ij}]$ *é* 3×1*.*

Solução:

$$
\begin{aligned}
AB &= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 \cdot 5 + 3 \cdot 9 \\ 2 \cdot 5 + 8 \cdot 9 \\ 4 \cdot 5 + 0 \cdot 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 \\ 82 \\ 20 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$