

Determinantes

CONTEÚDO DO CAPÍTULO

- 2.1 Determinantes por expansão em cofatores 93
- 2.2 Calculando determinantes por meio de redução por linhas 100
- 2.3 Propriedades dos determinantes; regra de Cramer 106

INTRODUÇÃO

Neste capítulo, estudamos “determinantes” ou, mais precisamente, “funções determinante”. Diferentemente de funções reais, como $f(x) = x^2$, que associam um número real $f(x)$ a uma variável real x , as funções determinante associam um número real $f(A)$ a uma variável matricial A . Embora os determinantes tenham surgido primeiro no contexto de resolução de sistemas de equações lineares, não são mais usados com esse propósito nas aplicações do mundo real. Ainda que possam ser úteis na resolução de sistemas lineares muito pequenos (digamos, em duas ou três incógnitas), nosso interesse predominante nos determinantes deriva do fato de relacionarem vários conceitos da Álgebra Linear e fornecerem uma fórmula útil para a inversa de uma matriz.

2.1 Determinantes por expansão em cofatores

Nesta seção, definimos a noção de “determinante”. Isso nos dará condições para obter uma fórmula específica para a inversa de uma matriz invertível, quando até agora só dispomos de um procedimento computacional para encontrá-la. Essa fórmula, por sua vez, vai acabar fornecendo uma fórmula para a resolução de certos tipos de sistemas lineares.

Lembre-se do Teorema 1.4.5, que diz que a matriz 2×2

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

é invertível se $ad - bc \neq 0$ e que a expressão $ad - bc$ é denominada **determinante** da matriz A . Lembre, também, que esse determinante é denotado escrevendo

$$\det(A) = ad - bc \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \quad (1)$$

e que a inversa de A pode ser expressa em termos do determinante por

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad (2)$$

Um dos principais objetivos deste capítulo é o de obter análogos da fórmula (2) que sejam aplicáveis a matrizes quadradas de *todas as ordens*. Para isso, é conveniente usar entradas com índices ao escrever matrizes ou determinantes. Assim, denotando uma matriz 2×2 por

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

ADVERTÊNCIA É importante não esquecer que $\det(A)$ é um número, enquanto A é uma matriz.

Menores e cofatores

Definimos o determinante de uma matriz $A = [a_{ij}]$ de tamanho 1×1 por

$$\det[A] = \det[a_{11}] = a_{11}$$

as duas equações em (1) tomam a forma

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad (3)$$

A definição seguinte é fundamental para o nosso objetivo de definir o determinante de uma matriz de ordem superior.

DEFINIÇÃO 1 Se A for uma matriz quadrada, então o **menor da entrada** a_{ij} é denotado por M_{ij} e definido como o determinante da submatriz que sobra quando suprimimos a i -ésima linha e a j -ésima coluna de A . O número $(-1)^{i+j}M_{ij}$ é denotado por C_{ij} e é denominado **cofator da entrada** a_{ij} .

► EXEMPLO 1 Encontrando menores e cofatores

Seja

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -4 \\ 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

O menor da entrada a_{11} é

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 16$$

O cofator de a_{11} é

$$C_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = M_{11} = 16$$

Analogamente, o menor da entrada a_{32} é

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 26$$

O cofator de a_{32} é

$$C_{32} = (-1)^{3+2}M_{32} = -M_{32} = -26 \quad \blacktriangleleft$$

ADVERTÊNCIA Seguimos a convenção padrão de usar letras maiúsculas para denotar menores e cofatores, mesmo que sejam números e não matrizes.

Nota histórica O termo *determinante* foi introduzido pelo matemático alemão Carl Friedrich Gauss, em 1801 (ver nota à página 15), que o utilizou para “determinar” as propriedades de certos tipos de funções. É interessante observar que o termo *matriz* deriva da palavra em latim para “ventre”, por serem as matrizes consideradas um recipiente de determinantes.

Nota histórica Aparentemente, o termo *menor* é devido ao matemático inglês James Sylvester (ver nota à página 34), que escreveu o seguinte artigo científico publicado em 1850: “Agora conceba uma linha e uma coluna quaisquer sendo canceladas, e obtemos um ... quadrado, com um termo a menos em largura e profundidade do que o quadrado original; e supondo que o quadrado original consista em n linhas e n colunas, variando a linha e coluna excluídas dentre todas as seleções possíveis, obtemos n^2 desses quadrados menores, cada um dos quais representa o que eu vou denominar “Primeiro Determinante Menor” relativo ao determinante principal ou completo.”

Observação Observe que um menor M_{ij} e seu cofator correspondente C_{ij} são ou iguais ou negativos um do outro, e que o sinal $(-1)^{i+j}$ que os relaciona é $+1$ ou -1 de acordo com o padrão de tabuleiro de xadrez

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & \cdots \\ + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Por exemplo,

$$C_{11} = M_{11}, \quad C_{21} = -M_{21}, \quad C_{22} = M_{22}$$

e assim por diante. Assim, realmente nunca é preciso calcular $(-1)^{i+j}$ para encontrar C_{ij} ; basta calcular o menor M_{ij} e ajustar o sinal, se necessário, de acordo com o padrão do tabuleiro de xadrez. Teste isso no Exemplo 1.

► EXEMPLO 2 Expansão em cofatores de uma matriz 2×2

O padrão de tabuleiro de xadrez de uma matriz $A = [a_{ij}]$ de tamanho 2×2 é

$$\begin{bmatrix} + & - \\ - & + \end{bmatrix}$$

de modo que

$$\begin{aligned} C_{11} &= M_{11} = a_{22} & C_{12} &= -M_{12} = -a_{21} \\ C_{21} &= -M_{21} = -a_{12} & C_{22} &= M_{22} = a_{11} \end{aligned}$$

Deixamos para o leitor usar a Fórmula (3) para verificar que $\det(A)$ pode ser expresso em termos de cofatores das quatro maneiras a seguir.

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} \\ &= a_{21}C_{21} + a_{22}C_{22} \\ &= a_{11}C_{11} + a_{21}C_{21} \\ &= a_{12}C_{12} + a_{22}C_{22} \end{aligned} \tag{4}$$

Cada uma das quatro últimas equações é denominada *expansão em cofatores* do $\det(A)$. Em cada expansão de cofatores, todas as entradas e os cofatores vêm da mesma linha ou coluna de A . Por exemplo, na primeira equação, todas as entradas e os cofatores vêm da primeira linha de A ; na segunda, todas elas vêm da segunda linha de A ; na terceira, todas elas vêm da primeira coluna de A ; e na quarta, todas elas vêm da segunda coluna de A . ◀

A Fórmula (4) é um caso especial do resultado geral seguinte, que enunciamos sem demonstração.

Definição de um determinante geral

TEOREMA 2.1.1 Se A for uma matriz $n \times n$, então independentemente de qual linha ou coluna escolhermos, sempre obteremos o mesmo número multiplicando as entradas daquela linha ou coluna pelos cofatores correspondentes e somando os produtos obtidos.

Esse resultado nos permite apresentar a próxima definição.

DEFINIÇÃO 2 Se A for uma matriz de tamanho $n \times n$, então o número obtido multiplicando as entradas de uma linha ou coluna qualquer de A pelos cofatores correspondentes e somando os produtos assim obtidos é denominado **determinante de A** . As próprias somas são denominadas **expansões em cofatores de $\det(A)$** , ou seja,

$$\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj} \quad (5)$$

[expansão em cofatores ao longo da coluna j]

e

$$\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in} \quad (6)$$

[expansão em cofatores ao longo da linha i]

► **EXEMPLO 3** Expansão em cofatores ao longo da primeira linha

Encontre o determinante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

expandindo em cofatores ao longo da primeira linha.

Solução

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} \\ &= 3(-4) - (1)(-11) + 0 = -1 \end{aligned}$$

► **EXEMPLO 4** Expansão em cofatores ao longo da primeira coluna

Seja A a matriz do Exemplo 3. Calcule $\det(A)$ expandindo em cofatores ao longo da primeira coluna de A .

Solução

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 3(-4) - (-2)(-2) + 5(3) = -1 \end{aligned}$$

Isso está de acordo com o resultado obtido no Exemplo 3.

Observe que, no Exemplo 4, precisamos calcular três cofatores, enquanto no Exemplo 3, só dois, porque o terceiro foi multiplicado por zero. Como uma regra geral, a melhor estratégia para calcular uma expansão em cofatores é expandir ao longo de uma linha ou coluna com o maior número de zeros.



Charles Lutwidge Dodgson
(Lewis Carroll)
(1832–1898)

Nota histórica A expansão em cofatores não é o único método para expressar o determinante de uma matriz em termos de determinantes de ordens menores. Por exemplo, embora não seja muito bem conhecido, o matemático inglês Charles Dodgson, que foi o autor de *Alice no País das Maravilhas* e *Pelo Espelho* sob o pseudônimo de Lewis Carroll, inventou um tal método, denominado “condensação”. Esse método foi recentemente ressuscitado da obscuridade por ser especialmente adequado para o processamento paralelo em computadores.

[Imagem: Time & Life Pictures/Getty Images, Inc.]

► **EXEMPLO 5** Uma escolha esperta de linha ou coluna

Se A for a matriz 4×4

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

então a maneira mais fácil de calcular $\det(A)$ é expandir em cofatores ao longo da segunda coluna, que é a que tem mais zeros.

$$\det(A) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Para o determinante 3×3 , a maneira mais fácil é usar expansão em cofatores ao longo de sua segunda coluna, que é a que tem mais zeros.

$$\begin{aligned} \det(A) &= 1 \cdot -2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -2(1 + 2) \\ &= -6 \end{aligned}$$

► **EXEMPLO 6** Determinante de uma matriz triangular inferior

As contas a seguir mostram que o determinante de uma matriz triangular inferior 4×4 é o produto de suas entradas diagonais. Cada parte da conta usa uma expansão em cofatores ao longo da primeira linha.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & 0 \\ a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & 0 \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \\ &= a_{11} a_{22} a_{33} |a_{44}| = a_{11} a_{22} a_{33} a_{44} \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

O método ilustrado no Exemplo 6 pode ser facilmente adaptado para provar o próximo resultado geral.

TEOREMA 2.1.2 Se A for uma matriz triangular $n \times n$ (triangular superior, inferior ou diagonal), então $\det(A)$ é o produto das entradas na diagonal principal da matriz, ou seja, $\det(A) = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$.

Os determinantes de matrizes 2×2 e 3×3 podem ser calculados muito eficientemente usando o padrão sugerido na Figura 2.1.1.

Uma técnica útil para calcular determinantes 2×2 e 3×3

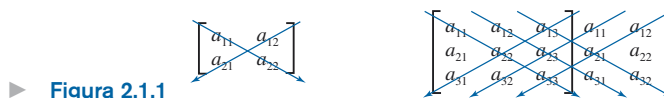


Figura 2.1.1

No caso 2×2 , o determinante pode ser calculado formando o produto das entradas na seta para a direita e subtraindo o produto das entradas na seta para a esquerda. No caso 3×3 , primeiro copiamos as primeira e segunda colunas conforme indicado na figura e depois podemos calcular o determinante somando o produto das entradas nas setas para a

ADVERTÊNCIA A técnica de setas só funciona com determinantes de matrizes 2×2 e 3×3 .

direita e subtraindo os produtos das entradas nas setas para a esquerda. Esse procedimento executa as seguintes contas.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \end{aligned}$$

que estão de acordo com a expansão em cofatores ao longo da primeira linha.

► **EXEMPLO 7** Uma técnica para calcular determinantes 2×2 e 3×3

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = (3)(-2) - (1)(4) = -10$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & 9 \end{vmatrix} = [45 + 84 + 96] - [105 - 48 - 72] = 240 \quad \blacktriangleleft$$

Revisão de conceitos

- Determinante
- Menor
- Cofator
- Expansão em cofatores

Aptidões desenvolvidas

- Encontrar os menores e cofatores de uma matriz quadrada.
- Usar a expansão em cofatores para calcular o determinante de uma matriz quadrada.
- Usar a técnica de setas para calcular o determinante de uma matriz 2×2 ou 3×3 .
- Usar o determinante de uma matriz invertível 2×2 para encontrar a inversa dessa matriz.
- Encontrar mentalmente o determinante de uma matriz triangular superior, inferior ou diagonal.

Conjunto de exercícios 2.1

► Nos Exercícios 1–2, encontre todos os menores e cofatores da matriz A. ◀

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 6 & 7 & -1 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

3. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 14 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Encontre

- (a) M_{13} e C_{13} , (b) M_{23} e C_{23} .
(c) M_{22} e C_{22} , (d) M_{21} e C_{21} .

4. Seja

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Encontre

- (a) M_{32} e C_{32} . (b) M_{44} e C_{44} .
(c) M_{41} e C_{41} . (d) M_{24} e C_{24} .

► Nos Exercícios 5–8, calcule o determinante da matriz. Se a matriz for invertível, use a Equação (2) pra encontrar a inversa. ◀

5. $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} -5 & 7 \\ -7 & -2 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{6} \\ 4 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$

► Nos Exercícios 9–14, use a técnica de setas para calcular o determinante da matriz. ◀

9. $\begin{bmatrix} a-3 & 5 \\ -3 & a-2 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} -2 & 7 & 6 \\ 5 & 1 & -2 \\ 3 & 8 & 4 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 3 & 5 & -7 \\ 1 & 6 & 2 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -5 \\ 1 & 7 & 2 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 9 & -4 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} c & -4 & 3 \\ 2 & 1 & c^2 \\ 4 & c-1 & 2 \end{bmatrix}$

► Nos Exercícios 15–18, encontre todos os valores de λ com os quais $(A) = 0$. ◀

15. $A = \begin{bmatrix} \lambda-2 & 1 \\ -5 & \lambda+4 \end{bmatrix}$

16. $A = \begin{bmatrix} \lambda-4 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 3 & \lambda-1 \end{bmatrix}$

17. $A = \begin{bmatrix} \lambda-1 & 0 \\ 2 & \lambda+1 \end{bmatrix}$

18. $A = \begin{bmatrix} \lambda-4 & 4 & 0 \\ -1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-5 \end{bmatrix}$

19. Calcule o determinante da matriz do Exercício 13 usando uma expansão em cofatores ao longo

- (a) da primeira linha (b) da primeira coluna
(c) da segunda linha (d) da segunda coluna
(e) da terceira linha (f) da terceira coluna

20. Calcule o determinante da matriz do Exercício 12 usando uma expansão em cofatores ao longo

- (a) da primeira linha (b) da primeira coluna
(c) da segunda linha (d) da segunda coluna
(e) da terceira linha (f) da terceira coluna

► Nos Exercícios 21–26, calcule $\det(A)$ com uma expansão em cofatores ao longo de uma linha ou coluna de sua escolha. ◀

21. $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 7 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

22. $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -4 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix}$

23. $A = \begin{bmatrix} 1 & k & k^2 \\ 1 & k & k^2 \\ 1 & k & k^2 \end{bmatrix}$

24. $A = \begin{bmatrix} k+1 & k-1 & 7 \\ 2 & k-3 & 4 \\ 5 & k+1 & k \end{bmatrix}$

25. $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 10 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

26. $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 2 & 3 \\ 9 & 4 & 6 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

► Nos Exercícios 27–32, obtenha por inspeção o determinante da matriz dada. ◀

27. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

28. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

29. $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 8 \end{bmatrix}$

30. $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

31. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 & -3 \\ 0 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

32. $\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 40 & 10 & -1 & 0 \\ 100 & 200 & -23 & 3 \end{bmatrix}$

33. Mostre que o valor do determinante independe de θ .

$$\begin{vmatrix} \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ -\cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) - \cos(\theta) & \sin(\theta) + \cos(\theta) & 1 \end{vmatrix}$$

34. Mostre que as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} d & e \\ 0 & f \end{bmatrix}$$

comutam se, e só se,

$$\begin{vmatrix} b & a-c \\ e & d-f \end{vmatrix} = 0$$

35. Sem fazer contas, descubra uma relação entre os determinantes

$$d_1 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & 1 & f \\ g & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad d_2 = \begin{vmatrix} a + \lambda & b & c \\ d & 1 & f \\ g & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

36. Mostre que

$$\det(A) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \operatorname{tr}(A) & 1 \\ \operatorname{tr}(A^2) & \operatorname{tr}(A) \end{vmatrix}$$

para qualquer matriz A de tamanho 2×2 .

37. O que pode ser dito sobre um determinante de n -ésima ordem com todas as entradas iguais a 1? Explique seu raciocínio.
38. Qual é o número máximo de zeros que uma matriz 3×3 pode ter sem ter determinante zero? Explique seu raciocínio.
39. Qual é o número máximo de zeros que uma matriz 4×4 pode ter sem ter determinante zero? Explique seu raciocínio.
40. Prove que os pontos (x_1, y_1) , (x_2, y_2) e (x_3, y_3) são colineares se, e só se,

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

41. Prove: a equação da reta que passa pelos pontos distintos (a_1, b_1) e (a_2, b_2) pode ser escrita como

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

42. Prove que se A for uma matriz triangular superior e se B_{ij} for a matriz que resulta quando suprimimos a i -ésima linha e a j -ésima coluna de A , então B_{ij} é triangular superior se $i < j$.

Exercícios Verdadeiro/Falso

Nas partes (a)-(j), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

- (a) O determinante da matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ de tamanho 2×2 é $ad + bc$.
- (b) Duas matrizes quadradas A e B podem ter o mesmo determinante se, e só se, forem de mesmo tamanho.
- (c) O menor M_{ij} é igual ao cofator C_{ij} se, e só se, $i + j$ for par.
- (d) Se A for uma matriz simétrica de tamanho 3×3 , então $C_{ij} = C_{ji}$ com quaisquer i e j .
- (e) O valor da expansão em cofatores de uma matriz A é independente da linha ou coluna escolhida para a expansão.
- (f) O determinante de uma matriz triangular inferior é a soma das entradas ao longo de sua diagonal principal.
- (g) Dados uma matriz quadrada A e um escalar c quaisquer, temos $\det(cA) = c \det(A)$.
- (h) Dadas quaisquer matrizes quadradas A e B , temos $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.
- (i) Dada qualquer matriz A de tamanho 2×2 , temos $\det(A^2) = (\det(A))^2$.

2.2 Calculando determinantes por meio de redução por linhas

Nesta seção, mostramos como calcular um determinante por meio da redução da matriz associada à forma escalonada por linhas. Em geral, esse método requer menos cálculos que a expansão em cofatores e é, portanto, o método preferido para matrizes grandes.

Um teorema básico

Começamos com um teorema fundamental que nos leva a um procedimento eficiente para calcular o determinante de uma matriz quadrada de qualquer tamanho.

TEOREMA 2.2.1 *Seja A uma matriz quadrada. Se A tem uma linha ou uma coluna de zeros, então $\det(A) = 0$.*

Prova Como o determinante de A pode ser obtido por uma coleção de expansões em cofatores ao longo de qualquer linha ou coluna, podemos usar a linha ou coluna de zeros.

Assim, denotando os cofatores de A ao longo dessa linha ou coluna por $C_1, C_2, \dots, C_n$, então segue da Fórmula (5) ou (6) da Seção 2.1 que

$$\det(A) = 0 \cdot C_1 + 0 \cdot C_2 + \dots + 0 \cdot C_n = 0 \quad \blacktriangleleft$$

O teorema útil a seguir relaciona o determinante de uma matriz com o determinante de sua transposta.

TEOREMA 2.2.2 *Seja A uma matriz quadrada. Então $\det(A) = \det(A^T)$.*

Prova Como transpor uma matriz troca suas colunas para linhas e suas linhas para colunas, a expansão em cofatores de A ao longo de qualquer linha é igual à expansão em cofatores de A^T ao longo da coluna correspondente. Assim, ambas matrizes têm o mesmo determinante. $\blacktriangleleft$

Como transpor uma matriz troca suas colunas para linhas e suas linhas para colunas, quase todo teorema sobre as linhas de um determinante tem uma versão companheira sobre as colunas, e vice-versa.

O próximo teorema mostra como uma operação elementar com as linhas de uma matriz quadrada afeta o valor de seu determinante. Em vez de uma prova formal, fornecemos uma tabela para ilustrar as ideias no caso 3×3 (ver Tabela 1).

Operações elementares com as linhas

TEOREMA 2.2.3 *Seja A uma matriz $n \times n$.*

- (a) *Se B for a matriz que resulta quando uma única linha ou coluna de A é multiplicada por um escalar k , então $\det(B) = k \det(A)$.*
- (b) *Se B for a matriz que resulta quando duas linhas ou colunas de A são permutadas, então $\det(B) = -\det(A)$.*
- (c) *Se B for a matriz que resulta quando um múltiplo de uma linha de A é somado a uma outra linha, ou quando um múltiplo de uma coluna de A é somado a uma outra coluna, então $\det(B) = \det(A)$.*

Tabela 1

Relação	Operação
$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ $\det(B) = k \det(A)$	A primeira linha de A é multiplicada por k .
$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ $\det(B) = -\det(A)$	A primeira e a segunda linhas de A são permutadas.
$\begin{vmatrix} a_{11} + ka_{21} & a_{12} + ka_{22} & a_{13} + ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ $\det(B) = \det(A)$	Um múltiplo da segunda linha de A é somado à primeira linha.

O primeiro painel da Tabela 1 mostra que podemos trazer um fator de qualquer linha (ou coluna) de um determinante para fora do determinante. Essa é uma maneira ligeiramente diferente de interpretar a parte (a) do Teorema 2.2.3.

Verificamos a primeira equação da Tabela 1 e deixamos as outras duas para o leitor. Para começar, observe que os determinantes dos dois lados da equação diferem apenas em sua primeira linha, de modo que esses determinantes têm os mesmos cofatores C_{11} , C_{12} , C_{13} ao longo dessa linha (já que esses cofatores dependem somente das entradas nas *duas*

linhas de baixo). Assim, expandindo o lado esquerdo em cofatores ao longo da primeira linha, obtemos

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= ka_{11}C_{11} + ka_{12}C_{12} + ka_{13}C_{13} \\ &= k(a_{11}C_{11} + a_{12}C_{12} + a_{13}C_{13}) \\ &= k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Matrizes elementares

É útil considerar o caso especial do Teorema 2.2.3 em que $A = I_n$ é a matriz identidade de $n \times n$, e E (em vez de B) denota a matriz elementar que resulta de efetuar a operação elementar com a linha de I_n . Nesse caso especial, o Teorema 2.2.3 implica o resultado seguinte.

TEOREMA 2.2.4 *Seja E uma matriz elementar $n \times n$.*

- (a) *Se E resulta da multiplicação de uma linha de I_n por um número não nulo k , então $\det(E) = k$.*
- (b) *Se E resulta da permutação de duas linhas de I_n , então $\det(E) = -1$.*
- (c) *Se E resulta da soma de um múltiplo de uma linha de I_n com uma outra linha, então $\det(E) = 1$.*

► EXEMPLO 1 Determinantes de matrizes elementares

Os determinantes de matrizes elementares seguintes, que são calculados mentalmente, ilustram o Teorema 2.2.4.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1, \quad \blacktriangleleft$$

A segunda linha de I_4 foi multiplicada por 3.

7 vezes a última linha de I_4 foi somada à primeira linha.

A primeira e última linhas de I_4 foram permutadas.

Observe que o determinante de uma matriz elementar não pode ser zero.

Matrizes com linhas ou colunas proporcionais

Se uma matriz quadrada A tem duas linhas proporcionais, então pode ser introduzida uma linha de zeros somando um múltiplo conveniente de uma das duas linhas à outra. Analogamente para colunas. Mas somar um múltiplo de uma linha ou coluna a uma outra não muda o determinante, de modo que, pelo Teorema 2.2.1, devemos ter $\det(A) = 0$. Isso prova o teorema seguinte.

TEOREMA 2.2.5 *Se A for uma matriz quadrada com duas linhas proporcionais ou duas colunas proporcionais, então $\det(A) = 0$.*

► EXEMPLO 2 Introduzindo linhas de zeros

O próximo cálculo mostra como introduzir uma linha de zeros quando há duas linhas proporcionais.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & 6 & -4 & 8 \\ 3 & 9 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 0 \quad \leftarrow \begin{array}{l} \text{A segunda linha é 2 vezes a primeira,} \\ \text{portanto, somamos } -2 \text{ vezes a} \\ \text{primeira linha à segunda para} \\ \text{introduzir uma linha de zeros.} \end{array}$$

Cada uma das matrizes a seguir tem duas linhas ou colunas proporcionais; assim, cada uma tem determinante zero.

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ -4 & 8 & 5 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 & -5 \\ 6 & -2 & 5 & 2 \\ 5 & 8 & 1 & 4 \\ -9 & 3 & -12 & 15 \end{bmatrix} \quad \blacktriangleleft$$

Veremos, agora, um método para calcular determinantes que envolve substancialmente menos cálculos do que a expansão em cofatores. A ideia do método é reduzir a matriz dada ao formato triangular superior por operações elementares com as linhas, depois calcular o determinante da matriz triangular superior (uma conta fácil) e, finalmente, relacionar esse determinante com o da matriz original. Vejamos um exemplo.

Calculando determinantes com redução por linhas

► EXEMPLO 3 Usando redução por linhas para calcular um determinante

Calcule $\det(A)$, sendo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

Solução Vamos reduzir A a uma forma escalonada (que é triangular superior) e, então, aplicar o Teorema 2.1.2.

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} && \leftarrow \text{A primeira e segunda linhas de } A \text{ foram permutadas.} \\ &= -3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} && \leftarrow \text{Um fator comum de 3 da primeira linha foi trazido para fora do determinante.} \\ &= -3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & -5 \end{vmatrix} && \leftarrow -2 \text{ vezes a primeira linha foi somado à terceira linha.} \\ &= -3 \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -55 \end{vmatrix} && \leftarrow -10 \text{ vezes a segunda linha foi somado à terceira linha.} \\ &= (-3)(-55) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & -5 \end{vmatrix} && \leftarrow \text{Um fator comum de } -55 \text{ da última linha foi trazido para fora do determinante.} \\ &= (-3)(-55)(1) = 165 \end{aligned}$$

Mesmo com os computadores mais velozes de hoje, levaria milhões de anos para calcular um determinante 25×25 por expansão em cofatores, motivo pelo qual, para determinantes grandes, são utilizados, muitas vezes, métodos com base em redução por linhas. Para determinantes pequenos (como os deste texto), uma escolha razoável é a expansão em cofatores.

► EXEMPLO 4 Usando operações com colunas para calcular um determinante

Calcule o determinante de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

Solução Esse determinante poderia ser calculado como o anterior, usando operações elementares com linhas para reduzir A à forma escalonada, mas podemos colocar A em forma triangular inferior em um passo, somando -3 vezes a primeira à quarta colunas para obter

O Exemplo 4 ressalta a utilidade de manter a atenção voltada às operações com colunas que podem encurtar nossas contas.

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & -26 \end{bmatrix} = (1)(7)(3)(-26) = -546 \quad \blacktriangleleft$$

Às vezes, a expansão em cofatores e as operações com linhas e colunas podem ser usadas em combinação para fornecer um método eficaz de calcular determinantes. Essa ideia é ilustrada no próximo exemplo.

► **EXEMPLO 5** Operações com linhas e expansão em cofatores

Calcule $\det(A)$, com

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

Solução Somando múltiplos convenientes da segunda linha às demais linhas, obtemos

$$\begin{aligned} \det(A) &= \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \end{vmatrix} \\ &= - \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 1 & 8 & 0 \end{vmatrix} \quad \leftarrow \text{Expansão em cofatores ao longo da primeira coluna.} \\ &= - \begin{vmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 9 & 3 \end{vmatrix} \quad \leftarrow \text{Somamos a primeira linha à terceira.} \\ &= -(-1) \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} \quad \leftarrow \text{Expansão em cofatores ao longo da primeira coluna.} \\ &= -18 \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Aptidões desenvolvidas

- Conhecer o efeito de operações elementares com linhas no valor do determinante.
- Conhecer o determinante dos três tipos de matrizes elementares.
- Saber como introduzir zeros nas linhas ou colunas de uma matriz para facilitar o cálculo de seu determinante.
- Usar a redução por linhas para calcular o determinante de uma matriz.
- Usar operações com as colunas para calcular o determinante de uma matriz.
- Combinar o uso de redução por linhas e expansão em cofatores para calcular o determinante de uma matriz.

Conjunto de exercícios 2.2

► Nos Exercícios 1–4, verifique que $\det(A) = \det(A^T)$. ◀

1. $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

3. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 5 & -3 & 6 \end{bmatrix}$

4. $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

► Nos Exercícios 5–9, calcule por inspeção o determinante da matriz elementar dada. ◀

5. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

7. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

► Nos Exercícios 10–17, calcule o determinante da matriz dada reduzindo a matriz à forma escalonada por linhas. ◀

10. $\begin{bmatrix} 3 & 6 & -9 \\ 0 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

11. $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \\ 5 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

13. $\begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 \\ -2 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & -9 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & -6 & -2 \\ 2 & 8 & 6 & 1 \end{bmatrix}$

15. $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \end{bmatrix}$

17. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

18. Repita os Exercícios 10–13 usando uma combinação de operações com linhas e expansão em cofatores.

19. Repita os Exercícios 14–17 usando uma combinação de operações com linhas e expansão em cofatores.

► Nos Exercícios 20–27, calcule o determinante, sabendo que

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -6 \quad \blacktriangleleft$$

20. $\begin{vmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix}$

21. $\begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix}$

22. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 2a & 2b & 2c \end{vmatrix}$

23. $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ -d & -e & -f \\ 4g & 4h & 4i \end{vmatrix}$

24. $\begin{vmatrix} a+d & b+e & c+f \\ -d & -e & -f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

25. $\begin{vmatrix} a+g & b+h & c+i \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

26. $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 2d & 2e & 2f \\ g+3a & h+3b & i+3c \end{vmatrix}$

27. $\begin{vmatrix} -3a & -3b & -3c \\ d & e & f \\ g-4d & h-4e & i-4f \end{vmatrix}$

28. Mostre que

(a) $\det \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = -a_{13}a_{22}a_{31}$

(b) $\det \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$

29. Use redução por linhas para mostrar que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$$

► Nos Exercícios 30–33, confirme as identidades sem calcular o determinante diretamente. ◀

30. $\begin{vmatrix} a_1 + b_1t & a_2 + b_2t & a_3 + b_3t \\ a_1t + b_1 & a_2t + b_2 & a_3t + b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = (1-t^2) \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

31. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1 + b_1 + c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2 + b_2 + c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3 + b_3 + c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

$$32. \begin{vmatrix} a_1 & b_1 + ta_1 & c_1 + rb_1 + sa_1 \\ a_2 & b_2 + ta_2 & c_2 + rb_2 + sa_2 \\ a_3 & b_3 + ta_3 & c_3 + rb_3 + sa_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$33. \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_1 - b_1 & c_1 \\ a_2 + b_2 & a_2 - b_2 & c_2 \\ a_3 + b_3 & a_3 - b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

34. Encontre o determinante da matriz

$$\begin{bmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{bmatrix}$$

► Nos Exercícios 35–36, mostre que $\det(A) = 0$ sem calcular o determinante diretamente. ◀

$$35. A = \begin{bmatrix} -2 & 8 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & 10 & 6 & 5 \\ 4 & -6 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$36. A = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

Exercícios verdadeiro/falso

Nas partes (a)–(f), determine se a afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

- (a) Se A for uma matriz 4×4 e B a matriz que resulta se trocarmos entre si as duas primeiras linhas de A e depois trocarmos entre si as duas últimas linhas de A , então $\det(B) = \det(A)$.
- (b) Se A for uma matriz 3×3 e B a matriz que resulta se multiplicarmos a primeira coluna por 4 e a terceira coluna por $\frac{3}{4}$, então $\det(B) = 3 \det(A)$.
- (c) Se A for uma matriz 3×3 e B a matriz que resulta se somarmos 5 vezes a primeira linha à segunda e à terceira linhas de A , então $\det(B) = 25 \det(A)$.
- (d) Se A for uma matriz $n \times n$ e B a matriz que resulta se multiplicarmos cada linha de A pelo índice dessa linha, então

$$\det(B) = \frac{n(n+1)}{2} \det(A)$$

- (e) Se A for uma matriz quadrada com duas colunas idênticas, então $\det(A) = 0$.
- (f) Se a soma do segundo com o quarto vetor linha de uma matriz A de tamanho 6×6 for igual ao último vetor linha, então $\det(A) = 0$.

2.3 Propriedades dos determinantes; regra de Cramer

Nesta seção, desenvolvemos algumas propriedades fundamentais dos determinantes e utilizamos esses resultados para deduzir uma fórmula para a inversa de uma matriz invertível e fórmulas para as soluções de certos tipos de sistemas lineares.

Propriedades básicas dos determinantes

Suponha que A e B sejam matrizes $n \times n$ e que k seja um escalar qualquer. Começamos considerando as possíveis relações entre $\det(A)$, $\det(B)$ e

$$\det(kA), \quad \det(A + B), \quad \text{e} \quad \det(AB)$$

Como um fator comum de qualquer linha de uma matriz pode ser trazido para fora do determinante e como cada uma das n linhas de kA tem o fator k em comum, segue que

$$\det(kA) = k^n \det(A) \quad (1)$$

Por exemplo,

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{vmatrix} = k^3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Infelizmente, em geral não existem relações simples entre $\det(A)$, $\det(B)$ e o determinante da soma $\det(A + B)$. Em particular, enfatizamos que $\det(A + B)$ geralmente *não* é igual a $\det(A) + \det(B)$. Isso é ilustrado pelo próximo exemplo.