Álgebra Linear - Aula 09

Espaço Linha, Espaço Coluna e Espaço Nulo

Profª Dra. Karla Lima

Sumário

Matriz Inicial

Vamos estudar as propriedades de:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 8 & 2 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 9 & 7 \\ -1 & 3 & -4 & 2 & -5 & -4 \end{bmatrix}.$$

Queremos observar como as operações elementares afetam:

- o **espaço nulo** ($\mathrm{Nul}(A)$);
- o **espaço linha** ($\mathrm{Row}(A)$);
- o **espaço coluna** ($\mathrm{Col}(A)$).

Redução de A à forma escalonada

Aplicando operações elementares de linha, obtemos:

$$\begin{aligned} L_2 &\rightarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 &\rightarrow L_3 - 2L_1 \\ L_4 &\rightarrow L_4 + L_1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Subtraindo $L_3 - L_2$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B$$

Assim, B é a forma escalonada por linhas de A.

Matrizes Equivalentes [1]

Definição 1.1

Dizemos que duas matrizes A e B são equivalentes por linhas se é possível obter uma a partir da outra por meio de uma sequência de operações elementares de linha.
Em outras palavras, existe uma matriz invertível E tal que

$$B = EA.$$

Neste caso, escrevemos

$$A \sim B.$$

1 Matriz Motivadora

2 Operações Elementares e os Espaços de uma Matriz

Exemplo 2.1

Considere a matriz dada anteriormente

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 8 & 2 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 9 & 7 \\ -1 & 3 & -4 & 2 & -5 & -4 \end{bmatrix}.$$

Usando o WolframAlpha (clique aqui):

1. *Determine o **espaço nulo de** A.*
2. *Escreva o vetor geral* $\mathbf{x}$ *em função das variáveis livres e indique a **dimensão do espaço nulo**.*

Exemplo 2.2

Considere a matriz equivalente à matriz A:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Usando o WolframAlpha (clique aqui):

1. *Determine o* ***espaço nulo de*** *B.*
2. *Escreva o vetor geral* **x** *em função das variáveis livres e indique a* ***dimensão do espaço nulo****.*

O que percebemos?

- As matrizes A e B são equivalentes por linhas.
- Apesar de B ter uma forma mais simples (escalonada), o **espaço nulo** obtido foi o mesmo em ambos os casos.

Observando os exemplos...

O que percebemos?

- As matrizes A e B são equivalentes por linhas.
- Apesar de B ter uma forma mais simples (escalonada), o **espaço nulo** obtido foi o mesmo em ambos os casos.

Pergunta motivadora

Será que isso sempre acontece? Ou seja, *as operações elementares de linha preservam o espaço nulo de qualquer matriz?*

Observando os exemplos...

O que percebemos?

- As matrizes A e B são equivalentes por linhas.
- Apesar de B ter uma forma mais simples (escalonada), o **espaço nulo** obtido foi o mesmo em ambos os casos.

Pergunta motivadora

Será que isso sempre acontece? Ou seja, *as operações elementares de linha preservam o espaço nulo de qualquer matriz?*

Vamos formalizar essa observação no próximo resultado.

Teorema 2.1 (Espaço nulo invariável)

As operações elementares de linha não alteram o espaço nulo de uma matriz.

Demonstração: Sejam A e B matrizes equivalentes por linhas. Então existe uma matriz invertível E tal que

$$B = EA,$$

onde E aplica apenas operações elementares na matriz A.

Primeira inclusão: $\mathrm{Nul}(A) \subset \mathrm{Nul}(B)$

Para qualquer vetor $\mathbf{x}$:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad EA\mathbf{x} = E\mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad B\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Segunda inclusão: $\mathrm{Nul}(B) \subset \mathrm{Nul}(A)$

Como E é invertível:

$$B\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad E^{-1}B\mathbf{x} = E^{-1}\mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad A\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Conclusão:

$$\mathrm{Nul}(A) = \mathrm{Nul}(B),$$

ou seja, o espaço nulo permanece inalterado pelas operações elementares de linha.

Exemplo 2.3

Novamente, considere a matriz A dada anteriormente

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 8 & 2 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 9 & 7 \\ -1 & 3 & -4 & 2 & -5 & -4 \end{bmatrix}.$$

Usando o WolframAlpha (clique aqui):

1. *Determinar o **espaço linha de** A. Para isso,*
   peça para o Wolfram te indicar quais vetores linhas de A são L.I. Escreva "are the vectors $\{(1, 2, 2, -1), (-3, -6, -6, 3), (4, 9, 9, -4), (-2, -1, -1, 2), (5, 8, 9, -5), (4, 2, 7, -4)\}$ linearly independent?"
2. *Escreva o vetor geral $\mathbf{x}$ em função das variáveis livres e indique a **dimensão do espaço linha de** A.*

Exemplo 2.4

Exemplo 2.4

Considerando a matriz dada anteriormente

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Usando novamente o WolframAlpha:

1. *Determine o **espaço linha de** B.*
2. *Escreva o vetor geral* $\mathbf{x}$ *em função das variáveis livres e indique a **dimensão do espaço linha de** B.*

Teorema do Espaço Linha

As matrizes A e B têm formatos diferentes: A é a matriz original, enquanto B é o resultado do seu escalonamento por operações elementares de linha.

Mesmo assim, ao compararmos seus **espaços linha**, notamos algo importante: o número de vetores linearmente independentes e a dimensão obtida são os mesmos.

Isso mostra que o processo de escalonamento **não altera as combinações lineares possíveis entre as linhas**. Ele apenas reorganiza as informações, deixando mais evidente a estrutura do espaço linha.

Essa constatação nos leva a um resultado fundamental: as operações elementares de linha **preservam o espaço linha** de uma matriz.

Teorema 2.2 (Espaço linha invariável)

As operações elementares de linha não alteram o espaço linha de uma matriz.

Demonstração: Lembre-se, as operações elementares nas linhas operam apenas combinações lineares das mesmas.

Inclusão 1: $\text{Row}(B) \subset \text{Row}(A)$

Se $B = EA$, com E a matriz que realiza operações elementares, então cada linha de B é uma combinação linear das linhas de A:

$$B_i = k_1 A_1 + k_2 A_2 + \cdots + k_m A_m.$$

Portanto:

$$\text{Row}(B) = \text{ger}(\{B_1, \ldots, B_m\}) \subset \text{ger}(\{A_1, \ldots, A_m\}) = \text{Row}(A).$$

Inclusão 2: $\text{Row}(A) \subset \text{Row}(B)$

Analogamente, como $A = E^{-1}B$ e E^{-1} também aplica apenas operações elementares, cada linha de A é combinação linear das linhas de B:

$$A_i = c_1B_1 + c_2B_2 + \cdots + c_mB_m.$$

Portanto:

$$\text{Row}(A) = \text{ger}(\{A_1, \ldots, A_m\}) \subset \text{Row}(B) = \text{ger}(\{B_1, \ldots, B_m\}).$$

Conclusão:

$$\text{Row}(A) = \text{Row}(B).$$

Ou seja, o espaço linha permanece inalterado pelas operações elementares de linha.

Exemplo 2.5

Considere as matrizes equivalentes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 8 & 2 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 9 & 7 \\ -1 & 3 & -4 & 2 & -5 & -4 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exemplo — Dependência preservada (colunas 1 e 2)

Exemplo 2.5

Considere o conjunto formado pela 1ª e pela 2ª coluna de A, $\{A_1, A_2\}$*, e seu correspondente em B,* $\{B_1, B_2\}$*. Vamos mostrar que* $\{A_1, A_2\}$ *é linearmente dependente, então* $\{B_1, B_2\}$ *também o é.*

Observe em A:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ -6 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix} = -3A_1.$$

Logo $\{A_1, A_2\}$ é linearmente *dependente*.

Exemplo 2.5

Considere o conjunto formado pela 1ª e pela 2ª coluna de A, $\{A_1, A_2\}$*, e seu correspondente em B,* $\{B_1, B_2\}$*. Vamos mostrar que* $\{A_1, A_2\}$ *é linearmente dependente, então* $\{B_1, B_2\}$ *também o é.*

Observe em A:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad A_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ -6 \\ -6 \\ 3 \end{bmatrix} = -3A_1.$$

Logo $\{A_1, A_2\}$ é linearmente *dependente*.

Agora em B (colunas correspondentes):

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad B_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -3B_1.$$

Logo $\{B_1, B_2\}$ também é linearmente *dependente*.

Exemplo 2.6

Considere o conjunto formado pela 1ª e pela 3ª coluna de A, $\{A_1, A_3\}$*, e seu correspondente em B,* $\{B_1, B_3\}$*. Vamos mostrar que* $\{A_1, A_3\}$ *é linearmente independente, então* $\{B_1, B_3\}$ *também o é.*

Em A temos

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 9 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Verifique que não existem escalares α, β (não ambos zero) com $\alpha A_1 + \beta A_3 = 0$ (por exemplo, A_3 não é múltiplo de A_1), portanto $\{A_1, A_3\}$ é *linearmente independente*.

Exemplo — Independência preservada (colunas 1 e 3)

Em B,

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad B_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Também não existe combinação não trivial que anule B_1 e B_3 — logo $\{B_1, B_3\}$ é também é L.I.

Preservação da Dependência

Nos exemplos anteriores, observamos algo importante:

Mesmo após aplicarmos operações elementares de linha — que transformaram a matriz A em B — as relações de **dependência e independência linear entre as colunas** foram mantidas.

Isso mostra que essas operações, embora alterem as linhas, **não modificam as combinações lineares possíveis entre as colunas**.

Em outras palavras, a estrutura de dependência entre vetores coluna é preservada quando passamos de A para uma matriz equivalente B.

Essa observação nos conduz a um resultado essencial sobre colunas de matrizes equivalentes.

Vetores Coluna de Matrizes Equivalentes

Teorema 2.3 (Vetores coluna de matrizes equivalentes)

Sejam A e B matrizes equivalentes por linhas. Então um conjunto qualquer de vetores colunas de A é linearmente independente se, e somente se, o conjunto de vetores colunas correspondente de B é linearmente independente.

Teorema 2.3 (Vetores coluna de matrizes equivalentes)

Sejam A e B matrizes equivalentes por linhas. Então um conjunto qualquer de vetores colunas de A é linearmente independente se, e somente se, o conjunto de vetores colunas correspondente de B é linearmente independente.

OBS: Multiplicação de Matrizes

Seja $A = EB$ e denote por $A = (a_{ij})_{m \times n}$, $B = (b_{ij})_{m \times n}$ e $E = (e_{ij})_{m \times m}$. Assim,

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^{m} e_{ik} a_{kj},$$

onde, para obter o elemento b_{ij} multiplicamos a i-ésima linha de E pela j-ésima coluna de A. Com isso, cada coluna B_j de B pode ser escrita como a multiplicação

$$B_j = EA_j.$$

Demonstração:

Seja $B = EA$, onde E é invertível e representa operações elementares por linhas.

Denotando $A = (A_1, \ldots, A_n)$ e $B = (B_1, \ldots, B_n)$ como colunas de A e B, temos

$$B_j = EA_j \quad \forall j = 1, \ldots, n.$$

Suponha que $\{A_{j_1}, \ldots, A_{j_k}\}$ seja linearmente independente. As colunas correspondentes em B são $\{B_{j_1}, \ldots, B_{j_k}\}$.

Demonstração

Considere a combinação linear nula:

$$c_1 B_{j_1} + \cdots + c_k B_{j_k} = \mathbf{0}.$$

Multiplicando por E^{-1}:

$$\begin{aligned} c_1 B_{j_1} + \cdots + c_k B_{j_k} = \overrightarrow{0} &\iff E^{-1}\left(c_1 B_{j_1} + \cdots + c_k B_{j_k}\right) = E^{-1}\overrightarrow{0} \\ &\iff c_1 E^{-1} B_{j_1} + \cdots + c_k E^{-1} B_{j_k} = \overrightarrow{0} \\ &\iff c_1 A_{j_1} + \cdots + c_k A_{j_k} = \overrightarrow{0}. \end{aligned}$$

Como $\{A_{j_1}, \ldots, A_{j_k}\}$ é L.I., segue que

$$c_1 = \cdots = c_k = 0 \quad \Rightarrow \quad \{B_{j_1}, \ldots, B_{j_k}\} \text{ é L.I.}$$

Analogamente, qualquer conjunto L.I. de colunas de B corresponde a um conjunto L.I. em A. De fato, considere a combinação linear nula:

$$c_1 A_{j_1} + \cdots + c_k A_{j_k} = \mathbf{0}.$$

Multiplicando por E:

$$\begin{aligned} c_1 A_{j_1} + \cdots + c_k A_{j_k} = \overrightarrow{0} &\iff E\left(c_1 A_{j_1} + \cdots + c_k A_{j_k}\right) = E\,\overrightarrow{0} \\ &\iff c_1 E A_{j_1} + \cdots + c_k A_{j_k} = \overrightarrow{0} \\ &\iff c_1 B_{j_1} + \cdots + c_k B_{j_k} = \overrightarrow{0}. \end{aligned}$$

Como $\{B_{j_1}, \ldots, B_{j_k}\}$ é L.I., segue que

$$c_1 = \cdots = c_k = 0 \quad \Rightarrow \quad \{A_{j_1}, \ldots, A_{j_k}\} \text{ é L.I.}$$

[1] Howard Anton and Chris Rorres.
***Álgebra Linear com Aplicações*.**
Bookman, Porto Alegre, 10 edition, 2012.
Tradução técnica: Claus Ivo Doering. Editado também como livro impresso em 2012.
Recurso eletrônico.

