

Aula 23: Diagonalização

Karla Lima

Álgebra Linear e Geometria Analítica

FACET/UFGD

Mudança de Base

Motivação

Mudança de Base

Lembrando da aula anterior

Uma transformação linear pode ser representada por matrizes diferentes dependendo da base escolhida.

Uma observação importante

A matriz

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

não é diagonal.

Mas possuí autovetores

Os autovetores são

$$(1, 1)$$

e

$$(1, -1).$$

Vamos utilizá-los como base.

Considere

$$\beta = \{(1, 1), (1, -1)\}.$$

Nessa base,

$$[A]_{\beta} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

O que aconteceu?

A transformação linear é a mesma.

Mas a matriz ficou muito mais simples.

Neste caso, os autovetores forneceram a melhor base para representar a transformação.

Motivação

Motivação

Considere um sistema cuja evolução é descrita por

$$x_{k+1} = Ax_k,$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Motivação

Considere um sistema cuja evolução é descrita por

$$x_{k+1} = Ax_k,$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

O vetor x_k representa o estado do sistema no instante k , enquanto x_{k+1} representa o estado no instante seguinte.

Motivação

Considere um sistema cuja evolução é descrita por

$$x_{k+1} = Ax_k,$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

O vetor x_k representa o estado do sistema no instante k , enquanto x_{k+1} representa o estado no instante seguinte.

A matriz A descreve como o sistema evolui ao longo do tempo.

Por exemplo,

$$x_1 = Ax_0,$$

$$x_2 = Ax_1 = A^2x_0,$$

$$x_3 = Ax_2 = A^3x_0.$$

Por exemplo,

$$x_1 = Ax_0,$$

$$x_2 = Ax_1 = A^2x_0,$$

$$x_3 = Ax_2 = A^3x_0.$$

De modo geral,

$$x_k = A^kx_0.$$

Onde aparecem modelos desse tipo?

Modelos da forma

$$x_{k+1} = Ax_k$$

aparecem em diversas áreas da Engenharia e das Ciências.

Onde aparecem modelos desse tipo?

Modelos da forma

$$x_{k+1} = Ax_k$$

aparecem em diversas áreas da Engenharia e das Ciências.

Alguns exemplos são:

- Evolução da carga em baterias de um sistema de armazenamento de energia;

Onde aparecem modelos desse tipo?

Modelos da forma

$$x_{k+1} = Ax_k$$

aparecem em diversas áreas da Engenharia e das Ciências.

Alguns exemplos são:

- Evolução da carga em baterias de um sistema de armazenamento de energia;
- Distribuição de energia entre diferentes partes de uma rede elétrica;

Onde aparecem modelos desse tipo?

Modelos da forma

$$x_{k+1} = Ax_k$$

aparecem em diversas áreas da Engenharia e das Ciências.

Alguns exemplos são:

- Evolução da carga em baterias de um sistema de armazenamento de energia;
- Distribuição de energia entre diferentes partes de uma rede elétrica;
- Fluxo de materiais entre setores de uma indústria;

Onde aparecem modelos desse tipo?

Modelos da forma

$$x_{k+1} = Ax_k$$

aparecem em diversas áreas da Engenharia e das Ciências.

Alguns exemplos são:

- Evolução da carga em baterias de um sistema de armazenamento de energia;
- Distribuição de energia entre diferentes partes de uma rede elétrica;
- Fluxo de materiais entre setores de uma indústria;

Em todos esses casos, queremos prever o estado do sistema após várias etapas.

Para uma matriz quadrada A , um autovalor λ e um autovetor v satisfazem

$$Av = \lambda v.$$

Para uma matriz quadrada A , um autovalor λ e um autovetor v satisfazem

$$Av = \lambda v.$$

- A direção do vetor é preservada;
- Apenas sua magnitude é alterada;
- Os autovetores revelam direções especiais da transformação.

Ideia da Diagonalização

Quando uma matriz possui autovetores linearmente independentes suficientes, podemos escrevê-la na forma

$$A = PDP^{-1},$$

onde

- P é formada pelos autovetores;
- D é uma matriz diagonal contendo os autovalores.

Ideia da Diagonalização

Quando uma matriz possui autovetores linearmente independentes suficientes, podemos escrevê-la na forma

$$A = PDP^{-1},$$

onde

- P é formada pelos autovetores;
- D é uma matriz diagonal contendo os autovalores.

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}.$$

Por que isso é útil?

Se

$$A = PDP^{-1},$$

então

$$A^k = (PDP^{-1})^k.$$

Por que isso é útil?

Se

$$A = PDP^{-1},$$

então

$$A^k = (PDP^{-1})^k.$$

Logo,

$$A^k = PD^kP^{-1}.$$

Mas calcular potências de uma matriz diagonal é muito simples:

$$D^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^k \end{bmatrix}.$$

Quando uma matriz pode ser diagonalizada?

Teorema

Uma matriz quadrada A é diagonalizável se possuir n autovetores linearmente independentes.

Quando uma matriz pode ser diagonalizada?

Teorema

Uma matriz quadrada A é diagonalizável se possuir n autovetores linearmente independentes.

Nesse caso, existe uma matriz invertível P tal que

$$P^{-1}AP = D,$$

onde D é uma matriz diagonal.

Como diagonalizar uma matriz?

Se A possui n autovetores linearmente independentes:

Como diagonalizar uma matriz?

Se A possui n autovetores linearmente independentes:

1. Organize os autovetores como colunas de uma matriz P ;

Como diagonalizar uma matriz?

Se A possui n autovetores linearmente independentes:

1. Organize os autovetores como colunas de uma matriz P ;
2. Coloque os autovalores correspondentes na diagonal de D ;

Como diagonalizar uma matriz?

Se A possui n autovetores linearmente independentes:

1. Organize os autovetores como colunas de uma matriz P ;
2. Coloque os autovalores correspondentes na diagonal de D ;
3. Calcule P^{-1} ;

Como diagonalizar uma matriz?

Se A possui n autovetores linearmente independentes:

1. Organize os autovetores como colunas de uma matriz P ;
2. Coloque os autovalores correspondentes na diagonal de D ;
3. Calcule P^{-1} ;
4. Verifique que

$$P^{-1}AP = D.$$

Correspondência entre P e D

A ordem dos autovalores em D deve acompanhar a ordem dos autovetores em P .

Correspondência entre P e D

A ordem dos autovalores em D deve acompanhar a ordem dos autovetores em P .

Se

$$P = \begin{bmatrix} | & | \\ v_1 & v_2 \\ | & | \end{bmatrix},$$

onde

$$Av_1 = \lambda_1 v_1, \quad Av_2 = \lambda_2 v_2,$$

então

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Correspondência entre P e D

Se trocarmos a ordem dos autovetores,

$$P = \begin{bmatrix} | & | \\ v_2 & v_1 \\ | & | \end{bmatrix},$$

também devemos trocar a ordem dos autovalores:

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}.$$

Exemplo

Considere

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Temos que:

$$\lambda_1 = -3, \quad v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\lambda_2 = 7, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

Exemplo

Considere

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}.$$

Temos que:

$$\lambda_1 = -3, \quad v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\lambda_2 = 7, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

Como existem dois autovetores linearmente independentes, A é diagonalizável.

Exemplo

A matriz dos autovetores é

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e sua inversa é

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

A matriz diagonal é

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

Verifica-se que

$$P^{-1}AP = D.$$

Nem Toda Matriz é Diagonalizável

Considere

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nem Toda Matriz é Diagonalizável

Considere

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Seu único autovalor é

$$\lambda = 1.$$

Nem Toda Matriz é Diagonalizável

Ao calcular os autovetores, obtemos apenas uma direção independente: $v_1 = (1, 0)$.

Nem Toda Matriz é Diagonalizável

Ao calcular os autovetores, obtemos apenas uma direção independente: $v_1 = (1, 0)$.

Portanto, não existem autovetores suficientes para formar uma base de $\mathbb{R}^2$.

A não é diagonalizável

Considere novamente o sistema

$$x_{k+1} = Ax_k.$$

Após k etapas,

$$x_k = A^k x_0.$$

Se $A = PDP^{-1}$, então

$$x_k = PD^k P^{-1} x_0.$$

Se $A = PDP^{-1}$, então

$$x_k = PD^k P^{-1} x_0.$$

Os autovalores ajudam a prever o comportamento do sistema:

- $|\lambda| < 1$: o efeito desaparece com o tempo;
- $|\lambda| > 1$: o efeito cresce;
- $|\lambda| = 1$: o efeito permanece.