

Aula 22: Autovalores e Autovetores

Karla Lima

Álgebra Linear e Geometria Analítica

FACET/UFGD

Motivação

Autovetores e Autovalores

Como encontrar autovalores?

Como encontrar autovetores?

Motivação

Existem direções especiais que uma transformação linear não altera?

Vamos descobrir experimentalmente.

Uma transformação linear

Considere

$$T(x, y) = (3x, -y).$$

Calcule:

$$T(1, 0), \quad T(0, 1), \quad T(1, 1).$$

Quais vetores permanecem na mesma direção?

O que aconteceu?

$$T(1, 0) = 3(1, 0)$$

$$T(0, 1) = -1(0, 1)$$

Esses vetores mantiveram sua direção.

Outros vetores mudaram de direção.

Como encontrar todas as direções especiais de uma transformação?

Para mais informações, vejam o vídeo:

Autovalores e Autovetores - O Matemático - Clique aqui!

Autovetores e Autovalores

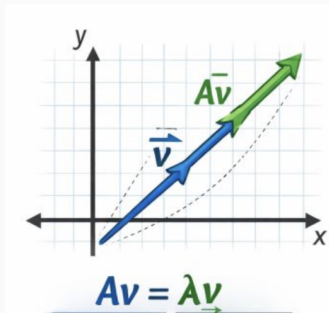
Definição

Se A é uma matriz quadrada, um vetor não nulo x é um autovetor de A quando existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$Ax = \lambda x.$$

O número λ é denominado autovalor associado.

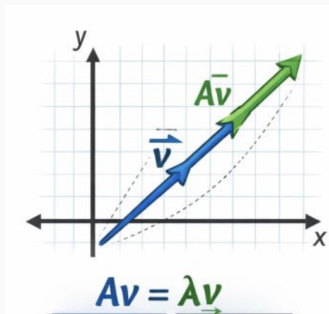
Interpretação



significa que:

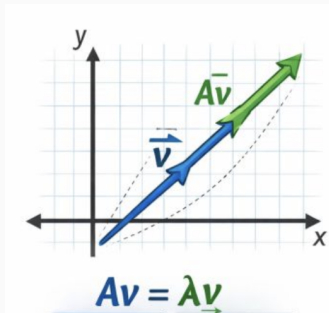
- a direção é preservada;
- apenas o comprimento muda;
- λ mede essa mudança.

Compreendendo a equação $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$



- O autovalor λ é o número que indica quanto o autovetor foi ampliado, reduzido ou invertido.

Compreendendo a equação $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$



- Um autovetor é um vetor não nulo cuja direção permanece a mesma após a transformação linear.
- Ela apenas multiplica seu comprimento por λ .

Exemplo

Considere

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$(1, 0)$$

é autovetor associado ao autovalor 3.

$$A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$(0, 1)$$

é autovetor associado ao autovalor -1 .

Como encontrar autovalores?

Partindo da definição

Temos

$$Ax = \lambda x.$$

Reorganizando,

$$(\lambda I - A)x = 0.$$

Condição importante

Para existir solução não nula,

$$(\lambda I - A)x = 0$$

deve possuir infinitas soluções.

Logo,

$$\lambda I - A$$

não pode ser invertível.

Equação característica

Portanto,

$$\det(\lambda I - A) = 0.$$

Essa é a equação característica da matriz.

Exemplo

Considere

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Então

$$\lambda I - A = \begin{bmatrix} \lambda - 3 & 0 \\ 0 & \lambda + 1 \end{bmatrix}.$$

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda - 3)(\lambda + 1).$$

Logo,

$$(\lambda - 3)(\lambda + 1) = 0.$$

Resolvendo,

$$\lambda_1 = 3$$

e

$$\lambda_2 = -1.$$

Como encontrar autovetores?

Primeiro autovalor

Para

$$\lambda = 3$$

resolvemos

$$(3I - A)x = 0.$$

Sistema obtido

Escolhendo o autovalor $\lambda = 3$, temos

$$A - 3I = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Logo, o sistema homogêneo

$$(A - 3I)X = 0$$

fica

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Sistema obtido

Efetuando o produto matricial:

$$\begin{cases} 0x + 0y = 0, \\ 0x + 4y = 0. \end{cases}$$

A primeira equação é sempre verdadeira e não fornece informação nova.

Da segunda equação:

$$4y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0.$$

A variável x não aparece em nenhuma restrição, portanto é uma **variável livre**.

Assim,

$$x = t, \quad y = 0,$$

onde $t \in \mathbb{R}$.

Portanto, todas as soluções do sistema são da forma

$$X = \begin{bmatrix} t \\ 0 \end{bmatrix}, \quad t \neq 0.$$

Escolhendo, por exemplo, $t = 1$, obtemos o autovetor

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Os vetores possuem a forma

$$(x, 0).$$

Portanto,

$$(1, 0)$$

gera o autoespaço associado a

$$\lambda = 3.$$