

Aula 21: Determinantes e Matrizes Invertíveis

Karla Lima

Álgebra Linear e Geometria Analítica

FACET/UFGD

Motivação

Determinante 2x2

Determinante 3x3

Conclusão

Motivação

Uma pergunta

Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Será que existe uma matriz inversa A^{-1} ?

Definição de matriz inversa

Uma matriz quadrada A é invertível quando existe uma matriz A^{-1} tal que

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I.$$

Nesse caso, podemos desfazer a ação de A .

Como descobrir rapidamente se uma matriz é invertível?

Determinante 2x2

Definição

Se

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

definimos

$$\det(A) = ad - bc.$$

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2.$$

Exemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 0.$$

Lembre-se: Se A é invertível, existe uma matriz A^{-1} tal que

$$AA^{-1} = I.$$

Vamos aplicar determinantes aos dois lados.

Uma propriedade fundamental

Para matrizes quadradas,

$$\det(AB) = \det(A) \det(B).$$

Além disso,

$$\det(I) = 1.$$

Consequência

Como

$$AA^{-1} = I,$$

temos

$$\det(A) \det(A^{-1}) = 1.$$

Logo,

$$\det(A) \neq 0.$$

Teorema Fundamental

Uma matriz 2×2 é invertível se, e somente se,

$$\det(A) \neq 0.$$

Se

$$\det(A) = 0,$$

a matriz não possui inversa.

Pratique um pouco

Determine quais matrizes são invertíveis.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Determinante 3x3

Considere

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}.$$

Vamos utilizar a Regra de Sarrus.

Regra de Sarrus

Copiamos as duas primeiras colunas:

$$\begin{array}{ccc|cc} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{array}$$

Regra de Sarrus

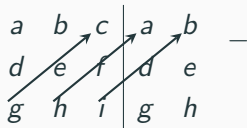
Somamos os produtos das diagonais descendentes:

$$\begin{array}{ccc|cc} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{array} +$$

$$aei + bfg + cdh$$

Regra de Sarrus

Subtraímos os produtos das diagonais ascendentes:



$$ceg + bdi + afh.$$

$$\det(A) = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh.$$

Exemplo

Calcule o determinante da matriz A e diga se ela é invertível ou não:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo

Considere a expansão

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & 0 & 5 & 6 \end{array}$$

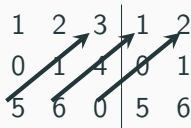
As diagonais descendentes fornecem

$$\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & 0 & 5 & 6 \end{array}$$

$$1 \cdot 1 \cdot 0 + 2 \cdot 4 \cdot 5 + 3 \cdot 0 \cdot 6 = 0 + 40 + 0 = 40.$$

Exemplo

As diagonais ascendentes fornecem



$$3 \cdot 1 \cdot 5 + 2 \cdot 0 \cdot 0 + 1 \cdot 4 \cdot 6 = 15 + 0 + 24 = 39.$$

$$\det(A) = 40 - 39.$$

$$\det(A) = 1.$$

Como

$$\det(A) \neq 0,$$

a matriz é invertível.

Teorema Fundamental

De modo geral, uma matriz $n \times n$ é invertível se, e somente se,

$$\det(A) \neq 0.$$

Se

$$\det(A) = 0,$$

a matriz não possui inversa.

Conclusão

Hoje aprendemos:

- O que é determinante;
- Como calcular determinantes 2×2 ;
- Como calcular determinantes 3×3 ;
- Quando uma matriz é invertível.