# Aula 20: Matriz de uma Transformação Linear

Karla Lima

Álgebra Linear e Geometria Analítica

FACET/UFGD

Matriz na base canônica

Matriz em outras bases

# Objetivo da aula

Como representar uma transformação linear por uma matriz?

A matriz depende das bases escolhidas [1].

# Matriz na base canônica

# A ideia principal

Seja:

$$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

Para encontrar a matriz de $T$ na base canônica:

1. Aplicamos $T$ nos vetores da base canônica;
2. Os vetores obtidos formam as colunas da matriz.

# Base canônica de $\mathbb{R}^2$

Se:

$$T(1,0) = v_1 \rightarrow \text{primeira coluna da matriz}$$

e

$$T(0,1) = v_2 \rightarrow \text{segunda coluna da matriz}$$

então:

$$[T] = \begin{bmatrix} | & | \\ v_1 & v_2 \\ | & | \end{bmatrix}$$

# Exemplo 1

Considere:

$$T(x, y) = (2x + y, x, x - y)$$

Calculando:

$$T(1, 0) = (2, 1, 1) \quad \text{e} \quad T(0, 1) = (1, 0, -1).$$

Logo:

$$[T] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

# Exemplo 2

Considere:

$$T(x,y) = (-y, x)$$

Então:

$$T(1,0) = (0,1) \quad \text{e} \quad T(0,1) = (-1,0)$$

Logo:

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

# Matriz em outras bases

# Mudando as bases

Agora queremos representar $T$ usando outras bases.

Seja

$$\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$$

uma base do domínio e

$$\gamma = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$$

uma base do contradomínio.

# Mudando as bases

Então a matriz depende de:

- como escrevemos os vetores de entrada;
- como escrevemos os vetores de saída.

# Como encontrar $[T]_\gamma^\beta$

1. Aplicamos $T$ nos vetores da base $\beta$;
2. Escrevemos cada imagem nas coordenadas da base $\gamma$;
3. Essas coordenadas formam as colunas da matriz.

# Exemplo

Considere:

$$T(x, y) = (x + y, x, y)$$

e as bases:

$$\beta = \{(1, 1), (1, 0)\}$$

e

$$\gamma = \{(2, 1, 1), (1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$$

# Primeira coluna

Aplicamos $T$ ao primeiro vetor da base:

$$T(1,1) = (2,1,1)$$

Agora escrevemos $(2,1,1)$ na base $\gamma$:

$$(2,1,1) = a(2,1,1) + b(1,1,0) + c(0,0,1)$$

# Primeira coluna

Isso gera o sistema:

$$\begin{cases} 2a + b = 2 \\ a + b = 1 \\ a + c = 1 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Logo,

$$[(2,1,1)]_\gamma = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

# Segunda coluna

Agora:

$$T(1,0) = (1,1,0)$$

Escrevendo na base $\gamma$:

$$(1,1,0) = a(2,1,1) + b(1,1,0) + c(0,0,1)$$

# Segunda coluna

Temos o sistema:

$$\begin{cases} 2a + b = 1 \\ a + b = 1 \\ a + c = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \\ c = 0 \end{cases}$$

Logo,

$$[(1,1,0)]_\gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

# Matriz final

As colunas obtidas são:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Portanto:

$$[T]_{\gamma}^{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

# Matriz final

Obtivemos:

$$[T]_\gamma^\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Já na base canônica:

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

# Matriz final

A transformação linear é a mesma.

O que mudou foi apenas a forma de representá-la.

Uma boa escolha de bases pode simplificar muito a matriz da transformação.

# Por que mudar de base?

- Algumas bases simplificam cálculos;
- Algumas matrizes tornam-se diagonais;
- Em Engenharia, mudamos coordenadas o tempo todo;
- Mudança de base aparece em circuitos, sinais e sistemas físicos.

# Referências


H. Anton and C. Rorres.
***Álgebra Linear com Aplicações*.**
Bookman Editora, 10 edition, 2012.