Aula 19: Mudança de Base de um Espaço Vetorial

Karla Lima

Álgebra Linear e Geometria Analítica

FACET/UFGD

Resumo sobre Bases e Dimensão

Resumo: Bases e Dimensão

Dimensão
A dimensão de um espaço vetorial é o número de vetores em uma base desse espaço.

Espaço $\mathbb{R}^n$
O espaço $\mathbb{R}^n$ possui dimensão n.

Resumo: Bases e Dimensão [1]

Conjuntos LI
Todo conjunto linearmente independente com n vetores em $\mathbb{R}^n$ é uma base de $\mathbb{R}^n$.

Conjuntos LD
Todo conjunto com mais de n vetores em $\mathbb{R}^n$ é linearmente dependente.

Geradores
Todo conjunto com menos de n vetores em $\mathbb{R}^n$ não gera $\mathbb{R}^n$.

Motivação

Uma pergunta importante

As coordenadas de um vetor são únicas?

A ideia principal

Um vetor geométrico é o mesmo.

Mas suas coordenadas dependem da base escolhida.

Pensando geometricamente

Na base canônica:

$$(3, 2)$$

significa:

$$3(1, 0) + 2(0, 1)$$

As coordenadas indicam quanto usamos de cada vetor da base.

Mudando a base

Considere agora a base:

$$B' = \{(1,1),(2,1)\}$$

Pergunta:

Como escrever o mesmo vetor usando essa nova base?

Coordenadas em uma nova base

Bases utilizadas

Vamos trabalhar com:

$$B = \{(1,0),(0,1)\}$$

e

$$B' = \{(1,1),(2,1)\}$$

A geometria do plano não mudou.

Mudamos apenas o sistema de coordenadas.

Exemplo

Queremos escrever:

$$(1, 0)$$

como combinação linear dos vetores de B'.

Ou seja:

$$(1, 0) = a(1, 1) + b(2, 1)$$

Isso gera o sistema:

$$\begin{cases} a + 2b = 1 \\ a + b = 0 \end{cases}$$

Calculando as coordenadas

Resolvendo o sistema:

$$\begin{cases} a + 2b = 1 \\ a + b = 0 \end{cases}$$

obtemos:

$$a = -1 \text{ e } b = 1.$$

Logo:

$$(1, 0) = -1(1, 1) + 1(2, 1)$$

Vetor coordenado

As coordenadas de $(1,0)$ na base B' são:

$$[(1,0)]_{B'} = (-1,1)$$

O vetor geométrico é o mesmo.

Mudaram apenas suas coordenadas.

Outro exemplo

Agora escreva:

$$(0, 1)$$

na base B'.

Queremos:

$$(0, 1) = a(1, 1) + b(2, 1)$$

Resultado

Resolvendo:

$$(0,1) = a(1,1) + b(2,1)$$

obtemos:

$$a = 2 \text{ e } b = -1.$$

Logo:

$$[(0,1)]_{B'} = (2,-1)$$

Matriz de Mudança de Base

Organizando os resultados

Encontramos:

$$[(1,0)]_{B'} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e

$$[(0,1)]_{B'} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Matriz de transição

Organizando os vetores coordenados nas colunas:

$$P_{B \to B'} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Essa matriz converte coordenadas da base B para coordenadas na base B'.

Usando a matriz

Se:

$$[v]_B = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

então:

$$[v]_{B'} = P_{B \to B'}[v]_B$$

Ou seja:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Interpretação

O vetor não mudou.

Mudamos apenas a forma de descrevê-lo.

- Coordenadas dependem da base;
- Bases diferentes geram coordenadas diferentes;
- A geometria do espaço continua a mesma.

Discussão

Perguntas importantes

- Por que usar outra base?
- Algumas bases podem simplificar problemas?
- Existe uma “melhor” base?
- O que muda geometricamente?

Conclusão

Mudança de base é mudança de coordenadas.

A geometria não muda.

A descrição algébrica muda.

Referências

H. Anton and C. Rorres.
***Álgebra Linear com Aplicações*.**
Bookman Editora, 10 edition, 2012.