Aula 16: Transformações Lineares. Base de um Espaço Vetorial.

Karla Lima

Álgebra Linear e Geometria Analítica

FACET/UFGD

Retomada

Retomando

- Na aula passada, vocês exploraram transformações no plano.
- Algumas deformavam, outras apenas moviam.

Pergunta: o que essas transformações tinham em comum?

Observações importantes

- Não criam curvas.
- Linhas continuam linhas.
- A origem não se move.

Essas transformações têm um nome

Transformação Linear

Transformações que preservam a estrutura

- Mantêm proporcionalidade.
- Respeitam soma de vetores.
- Respeitam multiplicação por escalar.

Formalizando [1]

$$T(u+v) = T(u) + T(v)$$

$$T(\lambda v) = \lambda T(v)$$

Isso só formaliza o que vocês já viram.

Consequência

$$T(0) = 0$$

- A origem permanece fixa:

Por isso translação não é transformação linear

Exploração

Classifique

Quais dessas são transformações lineares?

- $T(x, y) = (2x, 3y)$
- $T(x, y) = (x + 1, y)$
- $T(x, y) = (x + y, y)$

Testando com números

Exemplo: $T(x, y) = (x + 1, y)$

Teste a soma:

$$u = (1, 2), \quad v = (3, 1)$$

$$T(u + v) = T(4, 3) = (5, 3)$$

$$T(u) + T(v) = (2, 2) + (4, 1) = (6, 3)$$

Resultados diferentes $\rightarrow$ não é linear

Matriz

Matriz como transformação

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Toda matriz define uma transformação linear

Ideia-chave

$$(1,0) \rightarrow (a, c) \quad (0,1) \rightarrow (b, d)$$

As colunas da matriz mostram o que acontece com os vetores base

Aplicando a matriz

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Aplicando em $(1, 2)$**:**

$$M \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \\ 0 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

A matriz transforma o vetor.

Independência Linear

Gerar o plano

$$(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$$

Interpretação:

- Qualquer ponto do plano pode ser construído a partir desses dois vetores.
- Basta combinar $(1, 0)$ e $(0, 1)$ com coeficientes adequados.

Esses vetores são suficientes para "alcançar"todo o plano.

Mas isso sempre funciona?

E se escolhermos outros vetores?

Exemplo:

$$(1,0) \quad \text{e} \quad (2,0)$$

- Conseguimos chegar em qualquer ponto do plano?
- Ou ficamos "presos"em uma direção?

Nem todo conjunto de vetores gera o plano.

Compare

Caso 1:

$$(1,0),(0,1)$$

Geram todo o plano.

Caso 2:

$$(1,0),(2,0)$$

Não geram o plano.

Testando independência

Considere:

$$(1, 0), \quad (2, 0)$$

Pergunta:

Existe combinação que zera?

$$\alpha(1, 0) + \beta(2, 0) = (0, 0)$$

$$(\alpha + 2\beta, 0) = (0, 0)$$

Testando independência

Solução:

$$\alpha = -2\beta$$

Existem infinitas soluções $\rightarrow$ dependentes

Independência Linear

Vetores são independentes quando apontam para direções diferentes.

- Dois vetores: um não é múltiplo do outro;
- Mais de dois vetores: um não é combinação dos demais.

Base

Base

- Conjunto de vetores que:
    - Geram o espaço;
    - Não têm redundância.

Gera tudo, sem sobrar.

Exemplo

$$(1,0),(0,1)$$

- Geram o plano;
- São linearmente independentes.

Formam uma base de $\mathbb{R}^2$.

E se tivermos vetores a mais?

Considere:

$$(1,0), \quad (0,1), \quad (1,1)$$

Pergunta:

- Esses vetores ainda geram o plano?

Resposta:

- Sim, ainda geram $\mathbb{R}^2$

Onde está a redundância?

$$(1,1) = (1,0) + (0,1)$$

- O vetor $(1,1)$ pode ser obtido a partir dos outros dois.
- Ele não adiciona nova direção.

Ele é redundante (está "sobrando").

Por isso, o conjunto não é uma base.

Quando não é base

Considere:

$$(1,0), \quad (0,0)$$

Pergunta:

Geram o plano?

- Não conseguimos sair do eixo x.

$$\text{Falta direção} \rightarrow \text{não é base}$$

Resumo

- Gerar o espaço $\rightarrow$ conseguir chegar em qualquer ponto.
- Independência $\rightarrow$ não repetir direções.
- Base $\rightarrow$ gerar o espaço sem redundância.

Nem faltar vetores, nem sobrar vetores.

Conexão

Conexão final

Se eu sei onde vai uma base, sei toda a transformação.

Por quê?

- Qualquer vetor pode ser escrito como combinação dos vetores da base.
- A transformação respeita soma e multiplicação por escalar.

Consequência:

- Basta saber a imagem dos vetores da base.
- O resto do espaço é automaticamente determinado.

Exemplo

Considere a transformação:

$$T(1,0) = (2,1), \quad T(0,1) = (1,3)$$

Pergunta: Como encontrar $T(2,3)$?

Passo 1: escrever como combinação da base

$$(2,3) = 2(1,0) + 3(0,1)$$

Exemplo

Passo 2: aplicar a transformação

$$T(2,3) = 2T(1,0) + 3T(0,1)$$

$$= 2(2,1) + 3(1,3)$$

$$= (4,2) + (3,9) = (7,11)$$

Ligação com matriz

As imagens da base formam a matriz:

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Aplicando a matriz:

$$M \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 11 \end{bmatrix}$$

Mesma transformação, duas formas de ver!

Verificação rápida

Sabendo que:

$$T(1,0) = (2,1), \quad T(0,1) = (1,3)$$

Calcule: $T(1,1)$

Verificação rápida

Sabendo que:

$$T(1,0) = (2,1), \quad T(0,1) = (1,3)$$

Calcule: $T(1,1)$

$$T(1,1) = T(1,0) + T(0,1)$$

$$= (2,1) + (1,3) = (3,4)$$

Fechamento

- Transformações lineares preservam estrutura.
- Matrizes descrevem transformações.
- Bases organizam o espaço.

Tudo está conectado!

Referências

H. Anton and C. Rorres.
***Álgebra Linear com Aplicações*.**
Bookman Editora, 10 edition, 2012.