Aula 15: Transformações Lineares no Geogebra

Karla Lima

Álgebra Linear e Geometria Analítica

FACET/UFGD

Objetivos

Objetivo da Aula

- Explorar transformações no plano;
- Entender o que uma matriz **faz**;
- Diferenciar tipos de transformações;
- Preparar para definição formal.

O que matrizes realmente fazem?

Matrizes não são apenas tabelas de números.

Elas **transformam o espaço**.

- Giram objetos
- Esticam e comprimem
- Refletem e deformam
- Movem imagens na tela

Hoje vocês vão **ver isso acontecer**.

Atividade 1

Atividade 1

GeoGebra (Letra F) [1]

`https://www.geogebra.org/classroom/mznfayvr`

Instrução:

- Explore livremente os controles
- Observe o que muda e o que não muda

Exploração Inicial

Perguntas:

- O que muda na figura?
- O que não muda?
- Qual controle tem maior efeito?

Translação

Tarefa:

- Mexa apenas em e e f

Perguntas:

- A forma muda?
- Todos os pontos se movem igual?
- Isso deforma a figura?

Matriz M

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Tarefa:

- Zere e, f e α
- Mexa apenas em a, b, c, d

Efeitos da Matriz

Perguntas:

- O que acontece ao mudar apenas a?
- E apenas d?
- O que acontece ao mudar b ou c?
- A figura deforma ou quebra?

Reflexão

Experimento:

- Faça $a < 0$ ou $d < 0$

Pergunta:

- O que acontece com a figura?

Rotação

Tarefa:

- Mexa apenas em α

Perguntas:

- A forma muda?
- O tamanho muda?
- Qual a diferença para a matriz?

Combinação

Tarefa:

- Use todos os controles

Desafios:

- Tornar a figura mais larga
- Inclinar sem girar
- Girar sem deformar
- Mover sem deformar

Pergunta Importante

Pergunta:

É possível criar curvas ou "dobrar"a figura?

Discussão:

- O que essas transformações NÃO fazem?

Origem

Pergunta:

- O que acontece com o ponto $(0, 0)$?
- Qual transformação mantém ele fixo?

Modelo Matemático

- $F \rightarrow$ figura original (conjunto de pontos)
- $F' \rightarrow$ figura após a transformação

Ideia:

- Cada ponto da figura F é transformado
- O resultado é uma nova figura F'

$$F' \text{ é a imagem transformada de } F$$

Modelo Matemático das Transformações

$$F' = M \cdot R \cdot F + T$$

Matriz de deformação:

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

- Controla esticamento, compressão e inclinação

Modelo Matemático

Matriz de rotação:

$$R = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

- Gira a figura sem deformar

Modelo Matemático

Vetor de translação:

$$T = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

- Move a figura no plano

Modelo Matemático

$$F' = M \cdot R \cdot F + T$$

- $M \rightarrow$ deforma
- $R \rightarrow$ gira
- $T \rightarrow$ desloca

Modelo Matemática

Importante:

- A multiplicação por M e R **atua diretamente sobre** F
- Ou seja: cada ponto é transformado

E a translação?

- T **não multiplica** F
- Ela é **somada ao resultado**
- Portanto: move a figura inteira sem deformar

Multiplicar = transformar o ponto
Somar = deslocar o ponto

Atividade 2

Atividade 2

Imagem da internet

`https://www.geogebra.org/classroom/ygzmuprm`

Tarefa:

- Inserir imagem
- Aplicar transformações

Exploração com Imagem

Perguntas:

- A imagem deforma ou só move?
- O que muda com cada controle?
- O que permanece igual?

Desafios com Imagem

- Esticar horizontalmente
- Inclinar a imagem
- Refletir (espelhar)
- Girar e depois mover

Escala (esticar/comprimir)

Se:

$$b = 0, \quad c = 0$$

$$M = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix}$$

Efeito:

- Cada eixo é transformado separadamente:
- a controla o eixo x;
- d controla o eixo y.

A figura é esticada ou comprimida.

Cisalhamento (inclinar)

Se:

$$b \neq 0 \quad \text{ou} \quad c \neq 0$$

Exemplo:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Efeito:

- Um eixo "puxa"o outro;
- A figura inclina sem girar.

A forma muda, mas linhas continuam retas.

Reflexão (espelhamento)

Se:

$$a < 0 \quad \text{ou} \quad d < 0$$

Efeito:

- Inverte a direção de um eixo;
- Produz efeito de espelho.

A figura é refletida no plano.

Deformação geral

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Quando todos variam:

- escala
- inclinação
- reflexão

A transformação combina todos esses efeitos.

Ideia fundamental

"A matriz diz onde vão parar os vetores $(1, 0)$ e $(0, 1)$."

"O resto do plano segue esses dois."

Atividade 3

Interpretação geométrica

$$M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Ideia central:

- A matriz transforma os vetores base
- $(1, 0) \to (a, c)$
- $(0, 1) \to (b, d)$

O resto do plano segue esses dois vetores, pois qualquer vetor do plano pode ser escrito como combinação linear deles.

Previsão

Sem usar o GeoGebra:

- Para onde vai o vetor $(1, 0)$ se:
- $a = 2,\ b = 0,\ c = 0,\ d = 1$?

- E o vetor $(0, 1)$?

Tente prever antes de testar.

Explorando no GeoGebra

Acesse novamente:

`https://www.geogebra.org/classroom/mznfayvr`

Agora o foco muda:

- Observe principalmente os vetores $(1, 0)$ e $(0, 1)$

Não apenas observe — explique o que acontece

Explorando no GeoGebra

Experimento 1 (controle):

- $a = 1, \ b = 0, \ c = 0, \ d = 1$
- O que acontece com a figura?
- E com os vetores base?

Experimento 2:

- Mude apenas um parâmetro por vez
- Observe:
  - Para onde foi $(1, 0)$?
  - Para onde foi $(0, 1)$?
  - Como a figura acompanhou isso?

O que observar?

Foque nos vetores:

- $(1, 0)$ e $(0, 1)$ definem o plano.

Perguntas-chave:

- O que muda quando você altera a?
- E quando altera b?
- Qual vetor está sendo mais afetado?

A matriz muda os vetores base
e o resto do plano segue.

Conclusão

Fechamento

- Matrizes transformam o plano
- Transformações lineares preservam a estrutura
- Nem toda transformação é linear

"Entender o efeito é mais importante que decorar a fórmula"

Referências

Manoel Anilton Lima Reis.
A utilização do geogebra no ensino das transformações lineares.
Dissertação (mestrado em matemática), Universidade Federal do Amazonas, Manaus, AM, 2020.