Aula 14: Espaços Vetoriais

Karla Lima

Álgebra Linear e Geometria Analítica

FACET/UFGD

O que é um Espaço Vetorial?

Ideia:

Um espaço vetorial é um conjunto onde podemos:

- somar elementos
- multiplicar por números (escalares)

E o resultado continua no mesmo conjunto

Exemplos importantes

- Vetores em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$
- Matrizes
- Funções

Todos têm em comum:

- soma bem definida
- multiplicação por escalar

Interpretação Geométrica

- Vetores podem ser somados (regra do paralelogramo)
- Multiplicar por escalar muda o tamanho

Exemplos:

- $2\vec{v} \rightarrow$ estica o vetor
- $-1\vec{v} \rightarrow$ inverte direção

Definição (versão prática)

Um espaço vetorial é um conjunto V onde:

- existe soma: $\vec{u} + \vec{v}$
- existe multiplicação: $a\vec{u}$

E algumas regras precisam valer

(para evitar resultados estranhos)

Regras importantes

1. **Soma:**
   - $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
   - $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
2. **Elementos especiais:**
   - existe vetor zero
   - existe vetor oposto
3. **Escalar:**
   - $a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$
   - $(a + b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$

Exemplo principal: $\mathbb{R}^n$

$$\vec{u} = (u_1, \dots, u_n), \quad \vec{v} = (v_1, \dots, v_n)$$

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n)$$

$$a\vec{u} = (au_1, \dots, au_n)$$

Esse é o modelo mais importante para engenharia

Por que estudar Espaços Vetoriais?

Porque quase tudo em engenharia é vetor:

- forças
- velocidades
- campos elétricos e magnéticos
- deslocamentos

Espaços vetoriais permitem:

- combinar efeitos
- modelar sistemas
- resolver problemas reais

Exemplo: Matrizes

- Somamos elemento a elemento
- Multiplicamos por escalar

Uso:

- sistemas lineares
- modelagem

Quando NÃO é espaço vetorial

Exemplo:

$$a * (x, y) = (ax, 0)$$

Problema:

- perde informação
- não respeita as regras

Resumo

Um espaço vetorial:

- permite somar vetores
- permite multiplicar por escalares
- mantém estrutura consistente

Na prática:

- modelo base da engenharia
- usado em física, computação, dados

Onde isso aparece depois?

- Sistemas lineares
- Matrizes
- Autovalores (vibrações, estabilidade)
- Métodos numéricos

Resumo:

Espaços vetoriais são a base de quase toda a matemática da engenharia

Exemplo 1

Seja $\mathbb{M}_{2\times 2} = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{2\times 2} \mid a_{ij} \in \mathbb{R},\ i,j = 1,2 \right\}$*, o conjunto de todas as matrizes* 2×2 *com entradas reais.*

Tomando as operações usuais de soma e multiplicação por escalar

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix}$$

$$k \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \end{bmatrix},$$

$(\mathbb{M}_{2\times 2}, +, \cdot)$ *é um espaço vetorial.*

Exemplo 2

De modo geral, o conjunto $(\mathbb{M}_{m\times n}, +, \cdot)$ *de todas as matrizes de ordem* $m \times n$ *é um espaço vetorial com as operações usuais de matrizes.*

Exemplo 3

Seja $V = \mathbb{R}^2$ *com as operações definidas por:*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} &= (u_1 + v_1, u_2 + v_2) \\ a * \boldsymbol{u} &= (au_1, 0). \end{aligned}$$

Com essas operações, $V = (\mathbb{R}^2, +, *)$ *não é um espaço vetorial.*

Teorema 1

Sejam V um espaço vetorial, $\boldsymbol{u}$ um vetor em V e a um escalar. Então

a) $0 \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$
b) $a \cdot \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$
c) $(-1) \cdot \boldsymbol{u} = -\boldsymbol{u}$
d) *Se $a \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$, então $a = 0$ ou $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$.*

Referências