Álgebra Linear - Aula

Título

Profª Dra. Karla Lima

FACET - UFGD

Sumário

Motivação[1]

- Em muitos problemas matemáticos e físicos, surge um sistema da forma:

$$X'(t) = AX(t),$$

  onde A é uma matriz e $X(t)$ representa um vetor de funções desconhecidas.
- Resolver esse sistema é mais simples se A puder ser transformada em uma forma fácil de manipular — uma **matriz diagonal**.
- Esse processo recebe o nome de **diagonalização de matrizes**.

Ideia básica

Uma matriz A transforma vetores. Em geral, a direção de um vetor muda após a multiplicação por A. Mas há vetores especiais cuja direção não muda — apenas o comprimento é escalado.

Definição

Um número λ e um vetor não nulo v satisfazem

$$Av = \lambda v$$

- λ é um **autovalor** de A.
- v é um **autovetor** associado a λ.

- O autovalor indica quanto o vetor é **esticado** ou **invertido de sentido**.
- Os autovetores revelam as direções **invariantes** da transformação linear.

Ideia central da diagonalização

Definição

Uma matriz A é **diagonalizável** se existem uma matriz invertível P e uma matriz diagonal D tais que

$$A = PDP^{-1}.$$

- As colunas de P são os **autovetores** de A.
- Os elementos da diagonal de D são os **autovalores** de A.
- Assim, diagonalizar é **mudar de base** para o sistema dos autovetores.

Por que diagonalizar?

- Simplifica cálculos com potências de matrizes:
$$A^n = PD^nP^{-1}.$$
- Permite resolver sistemas diferenciais desacoplando as equações:
$$X'(t) = AX(t) \quad \Rightarrow \quad Y'(t) = DY(t),$$
com $Y(t) = P^{-1}X(t)$.
- Cada equação se torna independente:
$$y_i'(t) = \lambda_i y_i(t) \quad \Rightarrow \quad y_i(t) = c_i e^{\lambda_i t}.$$

Exemplo ilustrativo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}, \quad p(t) = t^2 - 2t - 3 = 0$$

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = -1$$

Autovetores:

$$v_1 = (1, 2), \quad v_2 = (1, -2)$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$A = PDP^{-1}.$$

Importância

- A diagonalização é uma ferramenta fundamental em:
  - Álgebra Linear — compreensão de transformações lineares;
  - Equações diferenciais — análise de estabilidade e comportamento de sistemas dinâmicos;
  - Computação científica — cálculo eficiente de potências e exponenciais de matrizes.
- Permite entender a **estrutura interna** de uma transformação linear: cada autovetor representa uma direção de transformação pura.

Resumo

1. Calcule os autovalores λ_i de A resolvendo $\det(A - \lambda I) = 0$.
2. Encontre os autovetores associados.
3. Forme P com os autovetores e D com os autovalores.
4. Verifique se $A = PDP^{-1}$.

$$A^n = PD^nP^{-1}, \quad e^{At} = Pe^{Dt}P^{-1}.$$

Referências I

[1] Reginaldo J. Santos.
Curso de Álgebra linear: Notas de aula.
`http://www.mat.ufmg.br/~regi`, 2002.