Álgebra Linear - Aula 13

Ortogonalidade

Profª Dra. Karla Lima

FACET - UFGD

Sumário

Normas em Espaços Vetoriais [1]

Assim como fizemos com a norma euclidiana, podemos construir várias normas em um espaço vetorial a partir de um produto interno.

Definição

*Se V for um espaço vetorial com produto interno real, então uma **norma** (ou **comprimento**) de um vetor $\mathbf{v} \in V$ é definida por*

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$$

*e a **distância** entre dois vetores é denotada por $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ e definida por*

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle}.$$

*Dizemos que um vetor de norma 1 é um **vetor unitário**.*

Exemplos de Normas

Exemplo

Usando os produtos internos apresentados na última aula, temos as seguintes normas:

1. $\langle , \rangle : M_{2\times 2} \times M_{2\times 2} \to \mathbb{R}$ *dada pela fórmula*
$$||A|| = \sqrt{\langle A, A \rangle} = \sqrt{tr(A^T A)}.$$
2. $\langle , \rangle : P_2(\mathbb{R}) \times P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *dada pela fórmula*
$$||p|| = \sqrt{\langle p, p \rangle} = \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2},$$
onde $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$.
3. $\langle , \rangle : C[a,b] \times C[a,b] \to \mathbb{R}$ *dada pela fórmula*
$$||f|| = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int_a^b f(x)^2 dx},$$
onde $C[a,b]$ *é o conjunto de todas as funções reais contínuas em* $[a,b]$.

Exercício

Calcule as normas dos vetores abaixo, usando as normas do exemplo anterior:

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$

c) $p(x) = 1$

d) $q(x) = 1 - \sqrt{2}x + 3x^2$

e) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{b-a}}$

f) $g(x) = cos\, x$, *com* $[a, b] = [0, \pi]$.

Nova Seção

Teorema

Desigualdade de Cauchy-Shwarz
Se **u** e **v** *forem vetores num espaço com produto interno, então*

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|.$$

Teorema

Desigualdade de Cauchy-Shwarz
Se **u** *e* **v** *forem vetores num espaço com produto interno, então*

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|.$$

A partir deste teorema, podemos concluir que, **para vetores não nulos**, temos que

$$-1 \leq \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} \leq 1.$$

Vamos mostrar?

Exercício

Mostre que, para vetores não nulos,

$$-1 \leq \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{||\mathbf{u}|| \, ||\mathbf{v}|} \leq 1.$$

Relação entre produto interno, norma e ângulo

- Assim, definimos para cada número real em $[0, \pi]$, o ângulo entre os vetores **u** e **v** como sendo o ângulo $\theta \in [0, \pi]$ tal que

$$cos\,\theta = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{||\mathbf{u}||\,||\mathbf{v}|}.$$

Observações:

- O produto interno mede o "quanto" um vetor aponta na direção do outro.
- Se $\theta = 0^\circ$, os vetores têm a **mesma direção** e $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|$.
- Se $\theta = 90^\circ$, os vetores são **ortogonais** e $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$.
- Podemos estender essa ideia para um conjunto com vários vetores: se todos são mutuamente ortogonais, temos um **conjunto ortogonal**.

Vetores Ortogonais

Definição

Um conjunto de vetores

$$A = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\} \subset \mathbb{R}^n$$

*é dito **ortogonal** se*

$$\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = 0, \quad \textit{para } i \neq j.$$

Vetores Ortogonais

Definição

Um conjunto de vetores

$$A = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\} \subset \mathbb{R}^n$$

*é dito **ortogonal** se*

$$\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = 0, \quad \textit{para } i \neq j.$$

Em um conjunto ortogonal, cada vetor é “independente” na direção dos outros — não há nenhuma sobreposição entre eles no sentido do produto interno.

Essa propriedade tem uma consequência importante:

Proposição

*Se A é ortogonal, então todos os vetores de A são **linearmente independentes**.*

Sabendo que

$$A = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$$

é um conjunto ortogonal, devemos provar que este conjunto é linearmente independente.

De fato, suponha que

$$a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}, \quad a_i \in \mathbb{R}.$$

Demonstração

Tomando o produto interno de ambos os lados com $\mathbf{v}_i$, obtemos:

$$\langle a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n, \mathbf{v}_i\rangle = a_i\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\rangle.$$

Como $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i\rangle > 0$, segue que $a_i = 0$, para todo $i = 1, 2, \ldots, n$.

Logo,

$$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$$

é um conjunto linearmente independente.

Exemplo

Verifique se os vetores abaixo, com o produto interno canônico do espaço, são ortogonais:

a) $\mathbf{u} = (1, 1)$ *e* $\mathbf{v} = (1, -1)$

b) $\mathbf{u} = (0, 1)$ *e* $\mathbf{v} = (2, 2)$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *e* $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

d) $\mathbf{u} = x$ *e* $\mathbf{v} = x^2$*, no espaço dos polinômios* $P_2(\mathbb{R})$.

e) $\mathbf{u} = x$ *e* $\mathbf{v} = x^2$*, no espaço das funções contínuas* $C[-1, 1]$.

Referências I

[1] Howard Anton and Chris Rorres.
***Álgebra Linear com Aplicações*.**
Bookman, Porto Alegre, 10 edition, 2012.
Tradução técnica: Claus Ivo Doering. Editado também como livro impresso em 2012.
Recurso eletrônico.