Aula 13: Equações do Plano

Karla Lima

Álgebra Linear e Geometria Analítica

FACET/UFGD

Produto Escalar

Produto Interno Euclidiano

Se $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ são vetores em $\mathbb{R}^n$, então o **produto escalar** de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, também denominado **produto interno euclidiano**, é denotado por $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ e definido pela fórmula

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n.$$

Produto Interno Euclidiano

Se $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ e $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ são vetores em $\mathbb{R}^n$, então o **produto escalar** de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, também denominado **produto interno euclidiano**, é denotado por $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ e definido pela fórmula

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n.$$

Nessa operação, tomamos dois vetores e devolvemos um número real:

$$\cdot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$
$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \to \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$$

Exemplo 9

Exemplo 1

Dados os vetores $\boldsymbol{u} = (-1, 3, 5, 7)$ *e* $\boldsymbol{v} = (5, -4, 7, 0)$*, o produto escalar* $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$ *é dado por*

Exemplo 1

Dados os vetores $\boldsymbol{u} = (-1, 3, 5, 7)$ *e* $\boldsymbol{v} = (5, -4, 7, 0)$*, o produto escalar* $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$ *é dado por*

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = (-1)5 + 3(-4) + 5 \cdot 7 + 7 \cdot 0 = 18.$$

Produto Interno Euclidiano

No caso particular em que $\mathbf{u} = \mathbf{v}$, temos

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} &= v_1 v_1 + v_2 v_2 + \ldots + v_n v_n \\ &= v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2 \\ &= \|\mathbf{v}\|^2. \end{aligned}$$

Assim, como $\|\mathbf{v}\| \geq 0$, tem-se

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}.$$

Propriedades do Produto Escalar

Muitas das propriedades algébricas do produto de números reais também são verdadeiras para o produto escalar:

Teorema 1

Se $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ *e* $\boldsymbol{w}$ *são vetores em* $\mathbb{R}^n$ *e* k *um escalar, então*

a) $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{u}$ *[Simetria]*

b) $\boldsymbol{w} \cdot (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{v}$ *[Distributividade]*

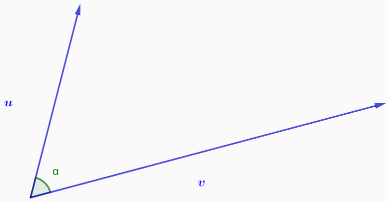
c) $k \cdot (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}) = (k\boldsymbol{u}) \cdot \boldsymbol{v}$ *[Homogeneidade]*

d) $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} \geq 0$ *e* $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} = 0$ *se, e somente se* $\boldsymbol{v} = 0$ *[Positividade]*

Ângulo entre vetores

Vamos ver como o produto escalar pode ser usado para calcular ângulos entre vetores em espaços euclidianos:

- Tomamos vetores não nulos **u** e **v**;
- Definimos o **ângulo** entre **u** e **v** como o menor ângulo não-negativo, gerado entre eles com uma rotação anti-horária.



- Em radianos, este ângulo sempre está no intervalo $[0, \pi]$.

Ângulo entre vetores

Definição 1

Se $\boldsymbol{u}$ *e* $\boldsymbol{v}$ *são vetores não-nulos em* $\mathbb{R}^n$*, definimos o ângulo* θ *entre esses vetores por*

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{u}\|\,\|\boldsymbol{v}\|}.$$

Ângulo entre vetores

Definição 1

Se $\boldsymbol{u}$ *e* $\boldsymbol{v}$ *são vetores não-nulos em* $\mathbb{R}^n$*, definimos o ângulo* θ *entre esses vetores por*

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{u}\|\,\|\boldsymbol{v}\|}.$$

Como a função $\cos x$ é bijetora em $[0,\pi]$, o ângulo θ está bem determinado por

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}\right).$$

Exemplo 2

Sejam $\boldsymbol{u} = (2, 2, 0)$ *e* $\boldsymbol{v} = (2, 0, 0)$ *vetores em* $\mathbb{R}^3$. *Qual o ângulo entre esses vetores?*

Exercício 1

Um vetor $\boldsymbol{u}$ do plano xy tem comprimento de 9 unidades e aponta na direção e sentido que está a 120° anti-horários a partir do eixo x positivo e um vetor $\boldsymbol{v}$ naquele plano tem um comprimento de 5 unidades e aponta da direção y positiva. Encontre $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$.

Ortogonalidade

Vetores Ortogonais [1]

Dados dois números reais a e b, temos que

$$a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ ou } b = 0.$$

Esta propriedade **não vale** para o produto escalar entre dois vetores!

Vetores Ortogonais [1]

Dados dois números reais a e b, temos que

$$a \cdot b = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ ou } b = 0.$$

Esta propriedade **não vale** para o produto escalar entre dois vetores!

Tome como exemplo os vetores não nulos $\mathbf{u} = (1, 2)$ e $\mathbf{v} = (-2, 1)$:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 = -2 + 2 = 0,$$

mesmo sem que um deles seja o vetor nulo.

Definição 2

Dois vetores, não nulos, $\boldsymbol{u}$ *e* $\boldsymbol{v}$ *em* $\mathbb{R}^n$ *são ditos* ***ortogonais*** *se* $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 0$.

Pela definição de ângulo, vemos que dois vetores são ortogonais se, e somente se, o cosseno do ângulo entre eles é zero:

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} = \frac{0}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} = 0.$$

Exemplo 3

1. *No exemplo anterior, vimos que* $\boldsymbol{u} = (1, 2)$ *e* $\boldsymbol{v} = (-2, 1)$ *são vetores ortogonais.*
2. *Os vetores canônicos* $(1, 0, 0), (0, 1, 0)$ *e* $(0, 0, 1)$ *são ortogonais, dois a dois.*

Conjunto Ortogonal

Definição 3

Um conjunto não-vazio de vetores de $\mathbb{R}^n$ *é denominado um* ***conjunto ortogonal*** *se cada par de vetores distintos do conjunto é ortogonal.*

Exemplo 4

O conjunto dos vetores canônicos de $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ *é um conjunto ortogonal.*

Vetores Ortogonais

Definição 4

Se S é um conjunto não-vazio de vetores de $\mathbb{R}^n$, dizemos que um vetor ***v*** *é* ***ortogonal ao conjunto*** *S, se v é ortogonal a cada vetor de S.*

Exemplo 5

O vetor $\boldsymbol{w} = (0, 0, 3)$ *é ortogonal ao conjunto*

$$S = \{(e, -1, 0), (\sqrt{3}, 2, 0)\}.$$

Vetores Ortonormais

Definição 5

Dois vetores $\boldsymbol{u}$ *e* $\boldsymbol{v}$ *em* $\mathbb{R}^n$ *são ditos* ***ortonormais*** *se* $\boldsymbol{u}$ *e* $\boldsymbol{v}$ *são ortogonais e têm comprimento 1.*

Vetores Ortonormais

Definição 5

Dois vetores $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$ *em* $\mathbb{R}^n$ *são ditos* ***ortonormais*** *se* $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$ *são ortogonais e têm comprimento 1.*

Definição 6

Um conjunto não-vazio de vetores de $\mathbb{R}^n$ *é denominado um* ***conjunto ortonormal*** *se cada par de vetores distintos do conjunto é ortonormal.*

Exemplo 6
O conjunto dos vetores canônicos de $\{(1,0),(0,1)\}$ *é um conjunto ortonormal.*

Exemplo 7
O conjunto $\left\{\left(\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{2}{5},\frac{4}{5}\right),\left(-\frac{2}{5},\frac{1}{5},-\frac{4}{5},\frac{2}{5}\right),\left(-\frac{4}{5},\frac{2}{5},\frac{2}{5},-\frac{1}{5}\right)\right\}$ *de* $\mathbb{R}^4$ *é ortonormal.*

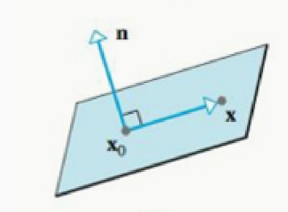
O que aprendemos

- Vetores ortogonais: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$ e, consequentemente, $\cos\theta = 0$ (θ o ângulo entre eles);
- Vetor ortogonal e unitário = vetor ortonormal;
- O conjunto $S_n = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$, dos vetores canônicos, é um conjunto ortonormal.

Equações do Planos

Vetor normal a um plano [1]

Se um vetor não-nulo **n** é perpendicular a um plano, dizemos que **n** é **normal** ao plano.



Isso quer dizer que, para quaisquer dois pontos X e X_0 no plano, o vetor $X - X_0$ é tal que

$$\mathbf{n} \cdot (X - X_0) = 0.$$

Equação Ponto-Normal

Portanto, uma equação do plano que passa por um ponto $X_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e tem como vetor normal $\mathbf{n} = (A, B, C)$ é dada por

$$(A, B, C) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0,$$

ou, equivalentemente,

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

onde $X = (x, y, z)$ é um ponto do plano.

Equação Geral

A partir da equação

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

podemos escrever a **equação geral** de um plano, dada por

$$Ax + By + Cz = Ax_0 + By_0 + Cz_0 = D.$$

Equação Geral: $Ax + By + Cz = D$

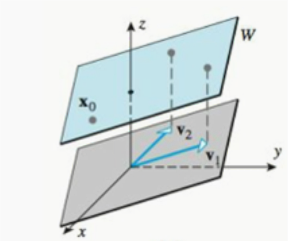
Exemplo 8

a) *Encontre uma equação ponto normal e uma equação geral do plano que passa pelo ponto* $(3, -1, 7)$ *e tem normal* $\boldsymbol{n} = (4, 2, -5)$.

b) *A reta* $r : (0, 0, -1) + t(0, 1, 2)$ *está no plano* $3x + 2y - z = 1$*?*

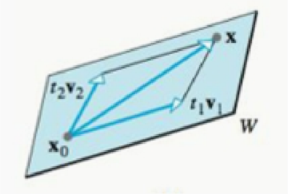
Equações Vetoriais

Todo plano α pode ser determinado especificando um ponto X_0 e dois vetores, $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$, não-nulos paralelos ao plano α e não paralelos entre si.



Equações Vetoriais

Se X é um ponto do plano, posicionamos múltiplos de $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$, de modo que o vetor $X - X_0$ seja a diagonal do paralelogramo de lado $t_1\mathbf{v}_1$ e $t_2\mathbf{v}_2$. A medida que variam t_1 e t_2 de $-\infty$ a ∞, X varre todo o plano α.



Podemos representar o plano que passa pelo ponto X_0 que é paralelo a $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ pela equação

$$X = X_0 + t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2 \quad \textbf{(Eq. Vetorial do Plano)}$$

Novamente, a partir da equação vetorial do plano, obtemos as equações paramétricas. De fato, temos

$$\begin{aligned} X &= X_0 + t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2 \\ \Rightarrow (x, y, z) &= (x_0, y_0, z_0) + t_1(a_1, b_1, c_1) + t_2(a_2, b_2, c_2) \end{aligned}$$

Logo, as equações paramétricas do plano são:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + t_1 a_1 + t_2 a_2 \\ y &= y_0 + t_1 b_1 + t_2 b_2 \quad (-\infty < t_1, t_2 < \infty) \\ x &= z_0 + t_1 c_1 + t_2 c_2 \end{aligned}$$

Exemplo 9

a) *Encontre uma equação vetorial e equações paramétricas do plano que passa pela origem de* $\mathbb{R}^3$ *e é paralelo aos vetores* $\boldsymbol{v}_1 = (1, -2, 3)$ *e* $\boldsymbol{v}_2 = (4, 0, 5)$.

b) *O ponto* $(1, 0, 1)$ *está no plano dado no item a)?*

Exemplo 10

Encontre as equações paramétricas do plano $x - y + 2z = 5$.

Considerações Finais

O que aprendemos

- Um plano está bem determinado por um vetor contido nele (que pode ser determinado por 2 dos seus pontos) e pelo seu vetor normal. Isso quer dizer que com essas 2 informações, conseguimos deduzir a equação que descreve todos os seus pontos.
- A equação vetorial de um plano é aquela descrita em função de um ponto da mesma e dois vetores paralelos ao plano, não nulos e não paralelos entre si.
- A equação paramétrica de um plano é aquela que determina os pontos do plano coordenada a coordenada.
- A equação geral de um plano é determinada por uma relação entre as coordenadas dos pontos pertencentes ao mesmo.

H. Anton and C. Rorres.
***Álgebra Linear com Aplicações*.**
Bookman Editora, 10 edition, 2012.