

Aula 13 Continuação: Equações do Plano

Karla Lima

Álgebra Linear e Geometria Analítica

FACET/UFGD

Determinantes em Matrizes 2×2

Produto Vetorial

Equações do Plano - Vetoriais e Paramétricas

Determinantes em Matrizes 2×2

- Lembrete: Chama-se matriz **quadrada** toda matriz cujo número de linhas coincide com o número de colunas.
- Associado a toda matriz quadrada $A_{m \times m}$ existe um número chamado **determinante** da matriz, denotado por $\det A$ ou $|A|$.

Determinante

- O valor do determinante de uma matriz $A = [a_{11}]_{1 \times 1}$ é definido como $\det A = a_{11}$.
- Para uma matriz $A_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, de ordem 2×2 , escrevemos

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Seu valor é definido como

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21},$$

que é obtido multiplicando-se os dois elementos da diagonal principal (dos elementos a_{ii}) e depois subtraindo o produto dos dois elementos restantes.

Produto Vetorial

Dado dois vetores $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$, o **produto vetorial** $\vec{u} \times \vec{v}$ é um novo vetor tal que:

- É perpendicular a \vec{u} e \vec{v}
- Tem direção determinada pela regra da mão direita
- Seu módulo está relacionado à área do paralelogramo

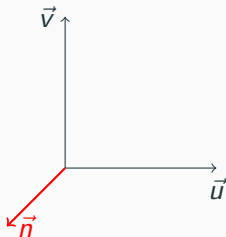
O vetor $\vec{u} \times \vec{v}$:

- É perpendicular aos vetores geradores \vec{u} e \vec{v}
- Seu sentido é dado pela **regra da mão direita**

Regra da mão direita:

- Dedos na direção de \vec{u}
- Fechando em direção a \vec{v}
- Polegar indica $\vec{u} \times \vec{v}$

Ortogonalidade



O produto vetorial gera um vetor ortogonal:

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{u} = 0$$

$$(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{v} = 0$$

- O vetor resultante é perpendicular a ambos
- Define um vetor normal ao plano gerado por \vec{u} e \vec{v}

Definição por Determinante

Se:

$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3), \quad \vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

então:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Expandimos pela primeira linha:

$$= \hat{i} \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$$

Atenção ao sinal: + - +

Os vetores $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ são os **vetores canônicos de \mathbb{R}^3** :

$$\hat{i} = (1, 0, 0), \quad \hat{j} = (0, 1, 0), \quad \hat{k} = (0, 0, 1)$$

Calculando os determinantes 2x2

$$= \hat{i}(u_2v_3 - u_3v_2) - \hat{j}(u_1v_3 - u_3v_1) + \hat{k}(u_1v_2 - u_2v_1)$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_2v_3 - u_3v_2)\hat{i} - (u_1v_3 - u_3v_1)\hat{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\hat{k}$$

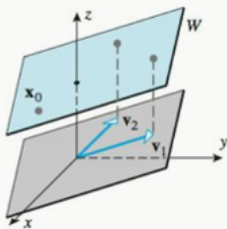
Forma vetorial:

$$\vec{u} \times \vec{v} = (u_2v_3 - u_3v_2, -(u_1v_3 - u_3v_1), u_1v_2 - u_2v_1)$$

Equações do Plano - Vetoriais e Paramétricas

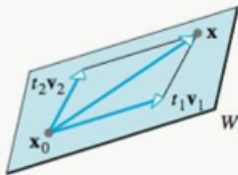
Equações Vetoriais

Todo plano α pode ser determinado especificando um ponto X_0 e dois vetores, \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 , não-nulos paralelos ao plano α e não paralelos entre si.



Equações Vetoriais

Se X é um ponto do plano, posicionamos múltiplos de \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 , de modo que o vetor $X - X_0$ seja a diagonal do paralelogramo de lado $t_1\mathbf{v}_1$ e $t_2\mathbf{v}_2$. A medida que variam t_1 e t_2 de $-\infty$ a ∞ , X varre todo o plano α .



Podemos representar o plano que passa pelo ponto X_0 que é paralelo a \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 pela equação

$$X = X_0 + t_1\mathbf{v}_1 + t_2\mathbf{v}_2 \quad (\text{Eq. Vetorial do Plano})$$

Equações Paramétricas

Novamente, a partir da equação vetorial do plano, obtemos as equações paramétricas. De fato, temos

$$\begin{aligned} X &= X_0 + t_1 \mathbf{v}_1 + t_2 \mathbf{v}_2 \\ \Rightarrow (x, y, z) &= (x_0, y_0, z_0) + t_1(a_1, b_1, c_1) + t_2(a_2, b_2, c_2) \end{aligned}$$

Logo, as equações paramétricas do plano são:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + t_1 a_1 + t_2 a_2 \\ y &= y_0 + t_1 b_1 + t_2 b_2 \quad (-\infty < t_1, t_2 < \infty) \\ z &= z_0 + t_1 c_1 + t_2 c_2 \end{aligned}$$

Exemplo 1

Exemplo 1

- a) *Encontre uma equação vetorial e equações paramétricas do plano que passa pela origem de \mathbb{R}^3 e é paralelo aos vetores $\mathbf{v}_1 = (1, -2, 3)$ e $\mathbf{v}_2 = (4, 0, 5)$.*
- b) *O ponto $(1, 0, 1)$ está no plano dado no item a)?*

Exemplo 2

Exemplo 2

Encontre as equações paramétricas do plano $x - y + 2z = 5$.

