Álgebra Linear - Aula 12

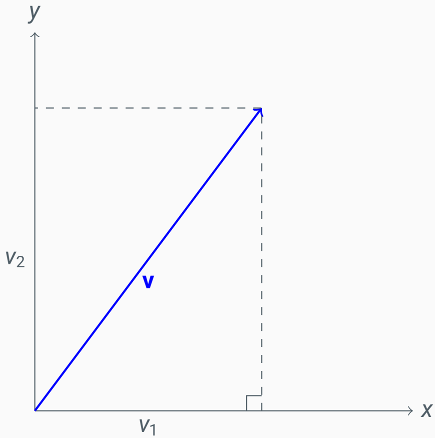
Produto Interno

Profª Dra. Karla Lima

FACET - UFGD

Sumário

Motivação: Dado o vetor $(x, y) = (v_1, v_2)$ com origem em $(0, 0)$, podemos calcular seu comprimento usando o Teorema de Pitágoras:



Chamamos de *comprimento* ou *norma* de um vetor $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ em $\mathbb{R}^2$ a quantidade:

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}.$$

Exemplo:

$$\mathbf{v} = (3,4) \implies \|\mathbf{v}\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

O cálculo é semelhante para os demais espaços euclidianos $\mathbb{R}^n$:

Definição

Seja $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$. *O comprimento ou norma de* $\mathbf{v}$, *denotado por* $\|\mathbf{v}\|$, *é definido como*

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_n^2}.$$

- Essa definição é uma consequência natural do conceito de produto interno euclidiano, que apresentaremos a seguir.

Definição

Chamamos de produto interno euclidiano em $\mathbb{R}^n$ uma função que associa um número real $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ a cada par de vetores em $\mathbb{R}^n$. Seu cálculo é dado por:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n,$$

com

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \quad e \quad \mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n).$$

- O resultado desta operação entre vetores é um número real!

Comprimento de um vetor a partir do produto interno

Norma (comprimento) de um vetor:
O comprimento de $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ é derivado do produto interno:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\| &= \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2} \\ &= \sqrt{u_1 u_1 + u_2 u_2 + \cdots + u_n u_n} \\ &= \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}. \end{aligned}$$

Comprimento de um vetor a partir do produto interno

Norma (comprimento) de um vetor:
O comprimento de $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ é derivado do produto interno:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\| &= \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2} \\ &= \sqrt{u_1 u_1 + u_2 u_2 + \cdots + u_n u_n} \\ &= \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}. \end{aligned}$$

Exemplo em $\mathbb{R}^2$:
Se $\mathbf{v} = (3, 4)$, então

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

Vetor Unitário

Definição

Dizemos que um vetor é unitário quando $\|\mathbf{v}\| = 1$.

1. Os vetores canônicos são unitários, em qualquer $\mathbb{R}^n$.
2. Se $\|\mathbf{v}\| \neq 0$, então $u = \dfrac{v}{\|\mathbf{v}\|}$ é um vetor unitário.

Nova Seção

Produtos Internos

- O que vimos até agora é um caso particular de um conceito mais geral chamado produto interno.
- Qualquer função que associa um par de vetores num espaço vetorial V a um número real pode ser chamada de produto interno se satisfizer algumas propriedades fundamentais, que detalharemos a seguir.

Produtos Internos [1]

Definição

*Um **produto interno** num espaço vetorial V é uma função que associa um número real* $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ *a cada par de vetores em V de tal maneira que os seguintes axiomas são satisfeitos por quaisquer vetores* $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$ *e qualquer escalar* $a \in \mathbb{R}$*:*

- $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$ *[simetria]*
- $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ *[aditividade]*
- $\langle a\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = a\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle, \quad a \in \mathbb{R}$ *[homogeneidade]*
- $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$*, com igualdade se e somente se* $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ *[positividade]*

Exemplo

Vamos verificar que as funções a seguir definem produtos internos.

1. $f : M_{2\times 2} \times M_{2\times 2} \to \mathbb{R}$ *dada pela fórmula*
$$\langle A, B\rangle = tr(A^T B).$$
2. $f : P_2(\mathbb{R}) \times P_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *dada pela fórmula*
$$\langle p, q\rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2,$$
onde $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ *e* $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$.
3. $f : C[a, b] \times C[a, b] \to \mathbb{R}$ *dada pela fórmula*
$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx,$$
onde $C[a, b]$ *é o conjunto de todas as funções reais contínuas em* $[a, b]$.

Assim como fizemos com a norma euclidiana, podemos construir várias normas em um espaço vetorial a partir de um produto interno.

Definição

Se V for um espaço vetorial com produto interno real, então uma ***norma*** *(ou* ***comprimento****) de um vetor $\mathbf{v} \in V$ é definida por*

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$$

e a ***distância*** *entre dois vetores é denotada por $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ e definida por*

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle}.$$

Dizemos que um vetor de norma 1 é um ***vetor unitário****.*

Referências I

[1] Howard Anton and Chris Rorres.
***Álgebra Linear com Aplicações*.**
Bookman, Porto Alegre, 10 edition, 2012.
Tradução técnica: Claus Ivo Doering. Editado também como livro impresso em 2012.
Recurso eletrônico.