Aula 12: Equações da Reta

Karla Lima

Álgebra Linear e Geometria Analítica

FACET/UFGD

Paralelismo

Equações da Reta em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$

Considerações Finais

Paralelismo

Definição 1

Dois vetores de $\mathbb{R}^n$ são ditos ***paralelos*** *se a representação em coordenadas de um dos vetores é um múltiplo escalar do outro. Ou seja, existe um número real k tal que*

$$\boldsymbol{u} = k\boldsymbol{v}.$$

Obs: O vetor $\mathbf{0}$ é paralelo a cada vetor de $\mathbb{R}^n$, pois pode ser escrito como $\mathbf{0} = 0\mathbf{v}$.

Paralelismo

Dois vetores **u** e **v** são paralelos se, e somente se, possuem a mesma direção:

Paralelismo

Dois vetores **u** e **v** são paralelos se, e somente se, possuem a mesma direção:

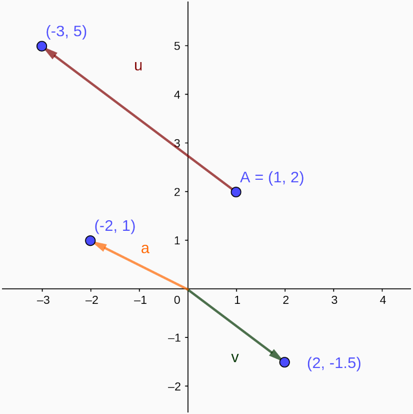
> Como $\mathbf{u} = k\mathbf{v}$, obtemos **u** ao multiplicarmos o vetor **v** por uma constante k e, como vimos anteriormente, a multiplicação por escalar muda apenas o comprimento e o sentido do vetor original.

Paralelismo

Para verificarmos se dois vetores são paralelos, devemos resolver o sistema de equações $\mathbf{u} = k\mathbf{v}$, obtido ao igualarmos as coordenadas do vetor $\mathbf{u}$ às coordenadas do vetor $k\mathbf{v}$.

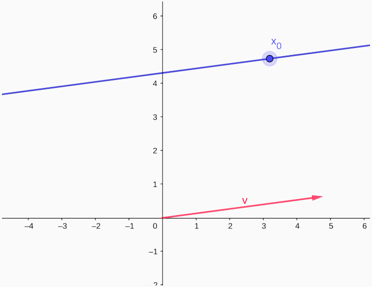
Exemplo 1

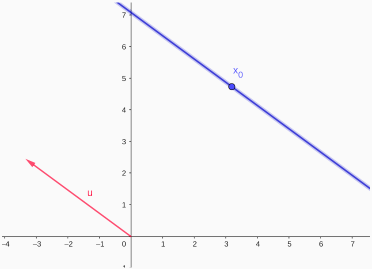
Os vetores $\boldsymbol{u}$ *e* $\boldsymbol{v}$ *são paralelos? E os vetores* $\boldsymbol{u}$ *e* $\boldsymbol{a}$*?*



Equações da Reta em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$

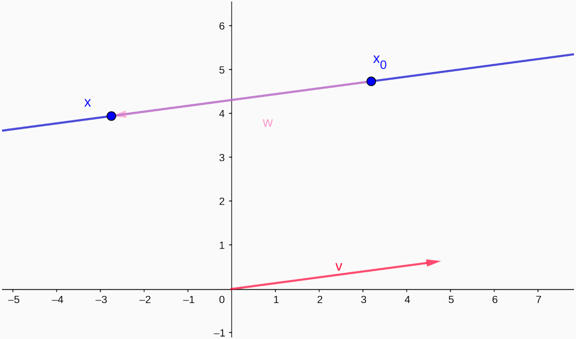
- Uma reta pode ser determinada de modo único especificando um ponto $\mathbf{X}_0$ na reta e um vetor não-nulo $\mathbf{v}$ que é paralelo à reta.





Equação Vetorial

Se $\mathbf{X}$ é um ponto da reta que passa por $\mathbf{X}_0$ e é paralela a $\mathbf{v}$, então o vetor $\mathbf{X} - \mathbf{X}_0$ é paralelo a v



de onde segue que

$$\mathbf{X} - \mathbf{X}_0 = t\mathbf{v}.$$

Equação Vetorial

A medida que a variável t (parâmetro) varia de $-\infty$ a ∞, o ponto $\mathbf{X}$ percorre a reta, que pode ser representada por

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + t\mathbf{v} \qquad (-\infty < t < \infty),$$

que é chamada de **equação vetorial da reta** que passa por $\mathbf{X}_0$ e é paralela ao vetor $\mathbf{v}$.

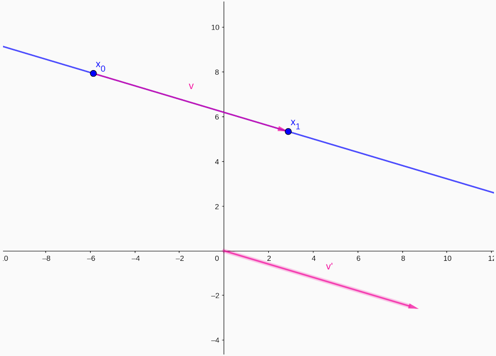
Exemplo 2

Seja $\boldsymbol{v} = (1,2)$ *e* $P_0(1,1)$.

a) *Encontre a equação vetorial da reta que é paralela a* $\boldsymbol{v}$ *e que passa por* P_0.
b) *Os pontos* $(0,-1)$ *e* $(0,0)$ *pertencem à reta dada no item anterior?*
c) *Encontre um ponto da reta, distinto dos pontos dados nos itens anteriores.*

Equação Vetorial da reta entre 2 pontos

- Se $\mathbf{X}_0$ e $\mathbf{X}_1$ são pontos distintos de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, então a reta determinada por esses pontos é paralela ao vetor $\mathbf{v} = \mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_0$.



- Sua equação é dada por $\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + t(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_0)$, ou equivalentemente,

$$\mathbf{X} = (1-t)\mathbf{X}_0 + t\mathbf{X}_1 \qquad -\infty < t < \infty.$$

Exemplo 3

Encontre a equação vetorial da reta que passa por $P_0(1, 2, -4)$ *e* $P_1(3, -1, -1)$.

Equação Paramétrica

Podemos decompor uma equação vetorial de uma reta em escalares igualando componentes correspondentes. Por exemplo, se $\mathbf{X}_0 = (a_0, b_0)$ e $\mathbf{v} = (a, b)$, obtemos

$$\begin{aligned}(x, y) &= (a_0, b_0) + t(a, b) \\ &= (a_0 + at, b_0 + bt).\end{aligned}$$

Assim obtemos as **equações paramétricas** da reta em $\mathbb{R}^2$:

$$x = a_0 + at, \quad y = b_0 + bt \qquad (-\infty < t < \infty).$$

Equação Paramétrica

Analogamente, se $\mathbf{X}_0 = (a_0, b_0, c_0)$ e $\mathbf{v} = (a, b, c)$, obtemos

$$\begin{aligned}(x, y, z) &= (a_0, b_0, c_0) + t(a, b, c)\\ &= (a_0 + at, b_0 + bt, c_0 + ct).\end{aligned}$$

Assim obtemos as **equações paramétricas** da reta em $\mathbb{R}^3$:

$$x = a_0 + at, \quad y = b_0 + bt \quad z = c_0 + ct \qquad (-\infty < t < \infty).$$

Exemplo 4

Encontre as equações paramétricas das retas encontradas nos exemplos 2 e 3.

Equação Geral da Reta

- **Equação Geral da Reta no Plano:** Se A, B e C são constantes reais, a equação da forma

$$Ax + By + C = 0$$

  é uma equação de uma reta em $\mathbb{R}^2$.

Veja a solução do exemplo 4, para descobrir como obter essas equações gerais a partir das equações paramétricas!

Exemplo 5

Dadas as retas

$$r_1 : \textit{Passa pelo ponto } (1, -1) \textit{ e é paralela ao vetor } \boldsymbol{v} = (1, 4);$$

$$r_2 : \quad x = 17 - 2t \quad e \quad y = \frac{t}{2}, \quad (-\infty < t < \infty),$$

verifique:

1. r_1 *e* r_2 *são paralelas?*
2. *Os pontos* $(13, 1)$ *e* $(-1, 0)$ *pertencem à reta* r_2*?*

Considerações Finais

O que aprendemos

- Uma reta está bem determinada por um dos seus pontos e pelo seu vetor diretor. Isso quer dizer que com essas 2 informações, conseguimos deduzir a equação que descreve todos os seus pontos.
- Se tivermos dois pontos, A e B, de uma reta, obtemos um vetor diretor: o vetor $\overrightarrow{AB}$. Assim, dois pontos distintos determinam uma reta, de modo único.
- A equação vetorial de uma reta é aquela descrita em função de um ponto da mesma e do seu vetor diretor.
- A equação paramétrica de uma reta é aquela que determina os pontos de uma reta coordenada a coordenada.
- A equação geral de uma reta é determinada por uma relação entre as coordenadas dos pontos pertencentes à mesma.

H. Anton and C. Rorres.
***Álgebra Linear com Aplicações*.**
Bookman Editora, 10 edition, 2012.