Aula 11: Combinação Linear. Vetores Canônicos.

Karla Lima

Álgebra Linear e Geometria Analítica

FACET/UFGD

Combinação Linear

Combinação Linear [1]

As operações de adição, subtração e multiplicação por escalar são frequentemente usadas na formação de novos vetores, a partir de vetores pré-determinados.

Por exemplo, dados os vetores $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{u}_3$, então o vetor

$$\mathbf{w} = 2\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 - 6\mathbf{u}_3$$

é formado com a combinação dessas operações aplicadas aos vetores dados.

Definição 1

Um vetor $\boldsymbol{w}$ *de* $\mathbb{R}^n$ *é uma* ***combinação linear*** *dos vetores* $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_k$ *de* $\mathbb{R}^n$ *se pode ser expresso na forma*

$$w = c_1\boldsymbol{u}_1 + c_2\boldsymbol{u}_2 + \ldots + c_n\boldsymbol{u}_k.$$

Os escalares $c_1, c_2, \ldots, c_k$ *são denominados* ***coeficientes*** *da combinação linear.*

Exemplo 3

Exemplo 1

Modelo de cores RGB: *As cores neste sistema são criadas juntando porcentagens de três cores primárias, identificando-as com vetores:*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r} &= (1,0,0) \quad \textit{(vermelho puro)}, \\ \boldsymbol{g} &= (0,1,0) \quad \textit{(verde puro)}, \\ \boldsymbol{b} &= (0,0,1) \quad \textit{(azul puro)}. \end{aligned}$$

Todas as outras cores são criadas formando-se combinações lineares de $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{g}$ *e* $\boldsymbol{b}$, *usando coeficientes entre 0 e 1.*

Exemplo 3: Combinação Linear

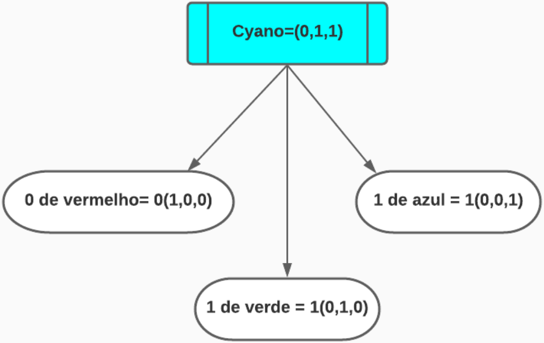
Usando o modelo anterior, temos:

1. Ciano $= (0, 1, 1)$ $\looparrowright$
2. Amarelo $= (1, 1, 0)$ $\looparrowright$
3. Preto $= (0, 0, 0)$ $\looparrowright$
4. Branco $= (1, 1, 1)$ $\looparrowright$
5. Laranja $= (1, 0.64, 0)$ $\looparrowright$

Qual a combinação linear usada para gerar cada uma dessas cores através do sistema RGB?

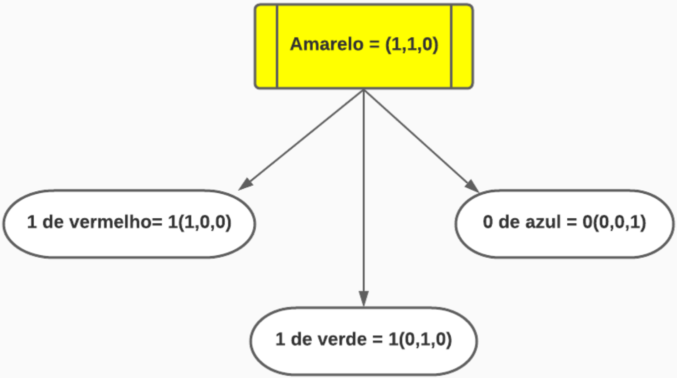
$$\mathbf{r} = (1, 0, 0), \quad \mathbf{g} = (0, 1, 0), \quad \mathbf{b} = (0, 0, 1).$$

Exemplo 3: Combinação Linear



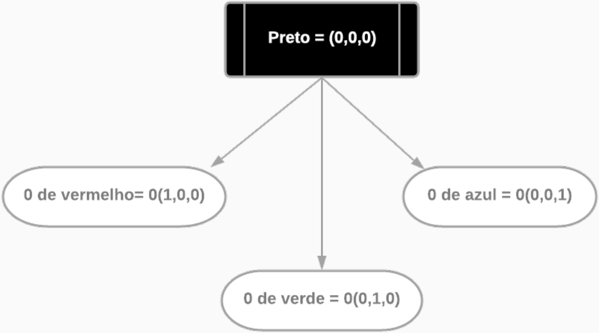
$$(0,1,1) = 0(1,0,0) + 1(0,1,0) + 1(0,0,1)$$

Exemplo 3: Combinação Linear



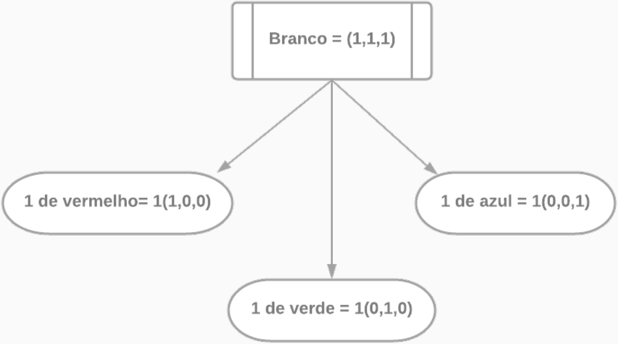
$$(1,1,0) = 1(1,0,0) + 1(0,1,0) + 0(0,0,1)$$

Exemplo 3: Combinação Linear



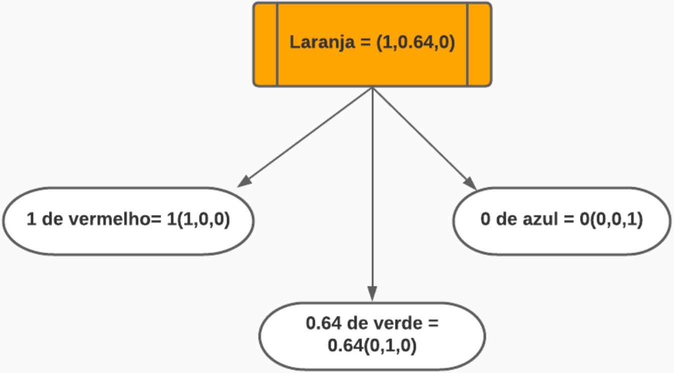
$$(0,0,0) = 0(1,0,0) + 0(0,1,0) + 0(0,0,1)$$

Exemplo 3: Combinação Linear



$$(1,1,1) = 1(1,0,0) + 1(0,1,0) + 1(0,0,1)$$

Exemplo 3: Combinação Linear



$$(1, 0.64, 0) = 1(1, 0, 0) + 0.64(0, 1, 0) + 0(0, 0, 1)$$

Vetores Unitários e Vetores Canônicos

Vetores Unitários

Vetores Unitários são aqueles em que seu comprimento $\|\mathbf{v}\|$ é igual a 1.

Vetores Unitários

Vetores Unitários são aqueles em que seu comprimento $\|\mathbf{v}\|$ é igual a 1.

- Dada uma direção, representada por um vetor não nulo $\mathbf{v}$, obtemos um vetor unitário nessa direção fazendo

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v}.$$

Vetores Unitários

Vetores Unitários são aqueles em que seu comprimento $\|\mathbf{v}\|$ é igual a 1.

- Dada uma direção, representada por um vetor não nulo $\mathbf{v}$, obtemos um vetor unitário nessa direção fazendo

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v}.$$

Este vetor tem a mesma direção e sentido de $\mathbf{v}$.

Vetores Unitários são aqueles em que seu comprimento $\|\mathbf{v}\|$ é igual a 1.

- Dada uma direção, representada por um vetor não nulo $\mathbf{v}$, obtemos um vetor unitário nessa direção fazendo

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v}.$$

Este vetor tem a mesma direção e sentido de $\mathbf{v}$.

Esse processo é denominado **normalização** de $\mathbf{v}$.

Exemplo 2

a) *Normalize o vetor* $\boldsymbol{v} = (2, 2, -1)$.

b) *Encontre o vetor unitário que possui a mesma direção do vetor* $\boldsymbol{v} = (1, -3, 5)$, *mas sentido oposto.*

Exemplo 3

Dado o vetor $\mathbf{v} = (1, 0, 4)$*, verifique se ele pode ser escrito como combinação linear dos elementos dos conjuntos dados:*

a) $S_1 = \{(2, 1, 3), (1, 1, -1)\}$

b) $S_2 = \{(5, 1, 2), (0, 1, 1)\}$

c) $S_3 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$

Exemplo 3

Dado o vetor $\boldsymbol{v} = (1, 0, 4)$, *verifique se ele pode ser escrito como combinação linear dos elementos dos conjuntos dados:*

a) $S_1 = \{(2, 1, 3), (1, 1, -1)\}$

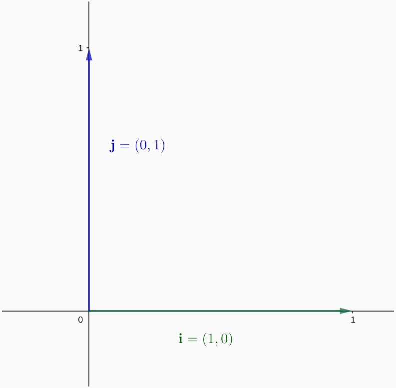
b) $S_2 = \{(5, 1, 2), (0, 1, 1)\}$

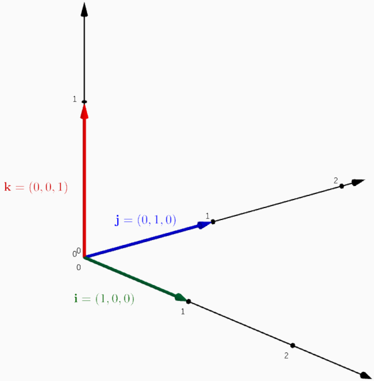
c) $S_3 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$

Você consegue relacionar os coeficientes da combinação linear dos elementos de S_3 e as coordenadas do vetor $\mathbf{v}$?

Vetores Canônicos [1]

No sistema de coordenadas retangulares em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, denominamos por **vetores unitários canônicos** os vetores unitários nas direções positivas dos eixos coordenados.





Vetores Canônicos

Cada vetor (v_1, v_2) em $\mathbb{R}^2$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores canônicos unitários:

$$\begin{aligned} (v_1, v_2) &= v_1(1,0) + v_2(0,1) \\ &= v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j}. \end{aligned}$$

Vetores Canônicos

Cada vetor (v_1, v_2) em $\mathbb{R}^2$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores canônicos unitários:

$$\begin{aligned}(v_1, v_2) &= v_1(1,0) + v_2(0,1)\\ &= v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j}.\end{aligned}$$

Por exemplo, podemos escrever $\mathbf{v} = (-\sqrt{7}, 3)$ como

$$(-\sqrt{7}, 3) = -\sqrt{7}(1,0) + 3(0,1) = -\sqrt{7}\mathbf{i} + 3\mathbf{j}.$$

Vetores Canônicos

Analogamente, cada vetor (v_1, v_2, v_3) em $\mathbb{R}^3$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores canônicos unitários:

$$\begin{aligned}(v_1, v_2, v_3) &= v_1(1,0,0) + v_2(0,1,0) + v_3(0,0,1)\\ &= v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Vetores Canônicos

Analogamente, cada vetor (v_1, v_2, v_3) em $\mathbb{R}^3$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores canônicos unitários:

$$\begin{aligned}(v_1, v_2, v_3) &= v_1(1,0,0) + v_2(0,1,0) + v_3(0,0,1)\\ &= v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Por exemplo, podemos escrever $\mathbf{v} = (2, -\pi, 5)$ como

$$(2, -\pi, 5) = 2(1,0,0) - \pi(0,1,0) + 5(0,0,1) = 2\mathbf{i} - \pi\mathbf{j} + 5\mathbf{k}.$$

Vetores Canônicos

De modo geral, definimos os **vetores unitários canônicos de** $\mathbb{R}^n$ por

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0), \quad \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, \quad \mathbf{e}_n = (0, 0, 0, \ldots, 1).$$

Assim, cada vetor $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ pode ser escrito como a combinação linear

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= v_1(1, 0, \ldots, 0) + v_2(0, 1, \ldots, 0) + \ldots + v_n(0, 0, \ldots, 1) \\ &= v_1\mathbf{e}_1 + v_2\mathbf{e}_2 + \ldots + v_n\mathbf{e}_n. \end{aligned}$$

Referências

H. Anton and C. Rorres.
***Álgebra Linear com Aplicações*.**
Bookman Editora, 10 edition, 2012.