Álgebra Linear - Aula 11

Transformações Lineares

Profª Dra. Karla Lima

FACET - UFGD

Sumário

1 Definições

2 Matriz de uma Transformação Linear

3 Núcleo e Imagem de uma Transformação Linear

1 **Definições**

2 Matriz de uma Transformação Linear

3 Núcleo e Imagem de uma Transformação Linear

Função x Aplicação

Função

É uma correspondência que associa a cada elemento do **domínio** um único elemento do **contradomínio**:

$$f : A \to B, \quad \forall a \in A,\ \exists!\, b \in B \text{ com } b = f(a)$$

Exemplo: $f(x) = x^2,\ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Aplicação

Função que atua entre estruturas, preservando propriedades, como em espaços vetoriais:

$$T : (V, +, *) \to (W, +, *).$$

Resumo Função x Aplicação

- Toda aplicação é uma função.
- Chamamos de **aplicação** quando queremos destacar a ação entre estruturas.

Transformação Linear

Definição

*Uma **transformação linear** é uma aplicação $T : V \to W$ entre espaços vetoriais que preserva:*

1. *Soma:* $T(u + v) = T(u) + T(v)$
2. *Produto por escalar:* $T(c\,v) = c\,T(v)$

Propriedade Fundamental

Proposição

Para qualquer transformação linear $T : V \to W$, temos:

$$T(0_V) = 0_W.$$

Ou seja, o vetor nulo de V é levado no vetor nulo de W.

Exemplos

Exemplo

Considere $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ T(x,y) = (x, x+y, x-y)$

- Quais são os **espaços vetoriais** envolvidos?

Exemplos

Exemplo

Considere $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ T(x, y) = (x, x + y, x - y)$

- Quais são os **espaços vetoriais** envolvidos?
- Quais são as **operações** de soma e de produto por escalar nesses espaços?

Exemplo

Considere $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ T(x, y) = (x, x + y, x - y)$

- Quais são os **espaços vetoriais** envolvidos?
- Quais são as **operações** de soma e de produto por escalar nesses espaços?
- A aplicação T **preserva a soma**? Isto é, $T(u + v) = T(u) + T(v)$ para todos $u, v \in \mathbb{R}^2$?

Exemplo

Considere $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ T(x,y) = (x, x+y, x-y)$

- Quais são os **espaços vetoriais** envolvidos?
- Quais são as **operações** de soma e de produto por escalar nesses espaços?
- A aplicação T **preserva a soma**? Isto é, $T(u+v) = T(u) + T(v)$ para todos $u, v \in \mathbb{R}^2$?
- A aplicação T **preserva o produto por escalar**? Ou seja, $T(cu) = c\,T(u)$ para todo $c \in \mathbb{R}$ e todo $u \in \mathbb{R}^2$?

Será que é uma Transformação Linear?

Discussão

$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad T(x, y) = (x,\ x + y,\ x - y),$ **é uma transformação linear?**

Exemplo com Polinômios

Exemplo

$T : P_2(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R}),\ T(p(x)) = x\,p(x)$

- Quais são os **espaços vetoriais** envolvidos?

Exemplo

$T : P_2(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R}),\ T(p(x)) = x\,p(x)$

- Quais são os **espaços vetoriais** envolvidos?
- O resultado $T(p(x)) = x\,p(x)$ é sempre um polinômio de $P_3(\mathbb{R})$? (Pense no grau máximo possível de $x\,p(x)$)

Exemplo com Polinômios

Exemplo

$T : P_2(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R}),\ T(p(x)) = x\,p(x)$

- Quais são os **espaços vetoriais** envolvidos?
- O resultado $T(p(x)) = x\,p(x)$ é sempre um polinômio de $P_3(\mathbb{R})$? (Pense no grau máximo possível de $x\,p(x)$)
- T **preserva a soma**? Isto é, $T(p + q) = T(p) + T(q)$ para todos $p, q \in P_2(\mathbb{R})$?

Exemplo com Polinômios

Exemplo

$T : P_2(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R}),\ T(p(x)) = x\,p(x)$

- Quais são os **espaços vetoriais** envolvidos?
- O resultado $T(p(x)) = x\,p(x)$ é sempre um polinômio de $P_3(\mathbb{R})$? (Pense no grau máximo possível de $x\,p(x)$)
- T **preserva a soma**? Isto é, $T(p+q) = T(p) + T(q)$ para todos $p, q \in P_2(\mathbb{R})$?
- T **preserva o produto por escalar**? Isto é, $T(c\,p) = c\,T(p)$ para todo $c \in \mathbb{R}$?

Exemplo com Polinômios

Discussão

$T : P_2(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R}),\ T(p(x)) = x\,p(x),$ **é uma transformação linear?**

1 Definições

2 Matriz de uma Transformação Linear

3 Núcleo e Imagem de uma Transformação Linear

UFGD Universidade Federal da Grande Dourados

- Toda transformação linear pode ser representada por uma matriz.
- Isso permite aplicar a transformação diretamente e facilita cálculos.

- Até agora vimos como podemos definir uma transformação linear T por meio de uma regra, que indica como cada vetor é transformado.
- O próximo passo é mostrar que toda transformação linear também pode ser representada **por uma matriz**.
- Essa representação nos permite:
  - Aplicar a transformação de forma direta, usando multiplicação matricial;
  - Facilitar cálculos e aplicações em exemplos concretos.

- Vamos retornar aos nossos exemplos iniciais.

Exemplo

Considere a aplicação

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad T(x, y) = (x,\ x + y,\ x - y).$$

Queremos escrever a transformação na forma

$$T(x, y) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x \\ x + y \\ x - y \end{pmatrix}.$$

Para representar uma transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ por uma matriz, seguimos alguns passos simples:

1. **Escolher a base do domínio:** No nosso exemplo, no $\mathbb{R}^2$, usaremos a base canônica:
$$\{\,(1,0),(0,1)\,\}.$$
2. **Escolher a base do contradomínio:** Aqui, com o $\mathbb{R}^3$, também usaremos a base canônica:
$$\{\,(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\,\}.$$

Observação: Sempre que não for explicitado o contrário, assumimos o uso da base canônica.

3. **Calculamos T em cada vetor da base do domínio:**
    - $T(1,0) = (1,1,1)$
    - $T(0,1) = (0,1,-1)$

3. **Calculamos T em cada vetor da base do domínio:**
    - $T(1,0) = (1,1,1)$
    - $T(0,1) = (0,1,-1)$
4. **Reescrevemos as imagens como combinação linear da base do contra-domínio:**
    - $T(1,0) = (1,1,1) = 1(1,0,0) + 1(0,1,0) + 1(0,0,1)$
    - $T(0,1) = (0,1,-1) = 0(1,0,0) + 1(0,1,0) - 1(0,0,1)$

3. **Calculamos T em cada vetor da base do domínio:**
   - $T(1,0) = (1,1,1)$
   - $T(0,1) = (0,1,-1)$
4. **Reescrevemos as imagens como combinação linear da base do contra-domínio:**
   - $T(1,0) = (1,1,1) = 1(1,0,0) + 1(0,1,0) + 1(0,0,1)$
   - $T(0,1) = (0,1,-1) = 0(1,0,0) + 1(0,1,0) - 1(0,0,1)$
5. **Os coeficientes em cada linha viram coluna da matriz A:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Confirmação da Matriz

Verifique que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x+y \\ x-y \end{pmatrix}.$$

Exemplo

Seguindo os passos dados, construa as matrizes das transformações lineares:

a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y, z) = (x + 2y, x - 2z)$.

b) $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$, $T(p(x)) = x\,p(x)$.

1 Definições

2 Matriz de uma Transformação Linear

3 Núcleo e Imagem de uma Transformação Linear

Núcleo

Definição

Seja $T : V \longrightarrow W$ uma transformação linear. O ***núcleo*** *de T, denotado por $\mathcal{N}(T)$, é o conjunto de todos os vetores de V que são levados por T no vetor nulo de W.*

$$\mathcal{N}(T) = \{\, v \in V \;:\; T(v) = \mathbf{0} \,\}.$$

Definição

*Seja $T : V \longrightarrow W$ uma transformação linear. A **imagem** de T, denotada por $\dim \mathcal{I}m(T)$, é o conjunto de todos os vetores de W que estão associados a um vetor de V pela transformação T:*

$$\mathcal{I}m(T) = \{w \in W : w = T(v) \text{ para algum } v \in V\}$$

Exemplos de Núcleo e Imagem

Calcule núcleo e imagem para:

- $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, T(x,y) = (x, x+y, x-y)$
- $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, T(x,y,z) = (x+2y, x-2z)$
- $T : P_2(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R}), T(p(x)) = x\,p(x)$

- Sabemos que uma função é injetora se para todo $u \neq v \in V$ então $T(u) \neq T(v)$.
- No caso das transformações lineares, podemos caracterizar da seguinte forma:

Teorema

*Uma transformação linear $T : V \longrightarrow W$ é **injetiva** se, e somente se,*

$$\mathcal{N}(T) = \{\mathbf{0}\}.$$

Demonstração — Parte 1

($\Rightarrow$) Suponha que T seja injetiva.

($\Rightarrow$) Suponha que T seja injetiva. Se $v \in \mathcal{N}(T)$, então:

$$T(v) = \mathbf{0}.$$

Mas também temos:

$$T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}.$$

Demonstração — Parte 1

($\Rightarrow$) Suponha que T seja injetiva. Se $v \in \mathcal{N}(T)$, então:

$$T(v) = \mathbf{0}.$$

Mas também temos:

$$T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}.$$

Como $T(v) = T(\mathbf{0})$ e T é injetiva, concluímos que:

$$v = \mathbf{0}.$$

($\Rightarrow$) Suponha que T seja injetiva. Se $v \in \mathcal{N}(T)$, então:

$$T(v) = \mathbf{0}.$$

Mas também temos:

$$T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}.$$

Como $T(v) = T(\mathbf{0})$ e T é injetiva, concluímos que:

$$v = \mathbf{0}.$$

Portanto, o vetor nulo é o único vetor no núcleo:

$$\mathcal{N}(T) = \{\mathbf{0}\}.$$

Demonstração — Parte 2

($\Leftarrow$) Suponha agora que $\mathcal{N}(T) = \{\mathbf{0}\}$.

Demonstração — Parte 2

($\Leftarrow$) Suponha agora que $\mathcal{N}(T) = \{\mathbf{0}\}$. Sejam $v, u \in V$ tais que:

$$T(v) = T(u).$$

Demonstração — Parte 2

($\Leftarrow$) Suponha agora que $\mathcal{N}(T) = \{\mathbf{0}\}$. Sejam $v, u \in V$ tais que:

$$T(v) = T(u).$$

Subtraindo as duas imagens:

$$T(v) - T(u) = 0 \quad \Rightarrow \quad T(v - u) = 0.$$

($\Leftarrow$) Suponha agora que $\mathcal{N}(T) = \{\mathbf{0}\}$. Sejam $v, u \in V$ tais que:

$$T(v) = T(u).$$

Subtraindo as duas imagens:

$$T(v) - T(u) = 0 \quad \Rightarrow \quad T(v - u) = 0.$$

Assim, $v - u \in \mathcal{N}(T)$. Como $\mathcal{N}(T) = \{0\}$, segue que:

$$v - u = 0 \quad \Rightarrow \quad v = u.$$

($\Leftarrow$) Suponha agora que $\mathcal{N}(T) = \{\mathbf{0}\}$. Sejam $v, u \in V$ tais que:

$$T(v) = T(u).$$

Subtraindo as duas imagens:

$$T(v) - T(u) = 0 \quad \Rightarrow \quad T(v - u) = 0.$$

Assim, $v - u \in \mathcal{N}(T)$. Como $\mathcal{N}(T) = \{0\}$, segue que:

$$v - u = 0 \quad \Rightarrow \quad v = u.$$

Conclusão: T é injetiva.

Teorema do Núcleo e da Imagem

Teorema

Sejam V e W espaços vetoriais de dimensão finita. Para toda transformação linear $T : V \to W$:

$$\dim V = \dim \mathcal{N}(T) + \dim \mathcal{I}m(T)$$

Exemplo

Dada $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y, z) = (x + y, y + z)$:

- *Calcule* $\mathcal{N}(T)$ *e* $\mathcal{I}m(T)$
- *Verifique:* $\dim V = \dim \mathcal{N}(T) + \dim \mathcal{I}m(T)$

Exemplo

Se $\dim \mathcal{N}(T) = 0$*, o que podemos concluir sobre* T*?*

Exemplo

Se $\dim \mathcal{I}m(T) = \dim W$*,* T *podemos afirmar que* T *é sobrejetiva?*