Aula 11: Norma. Distância.

Karla Lima

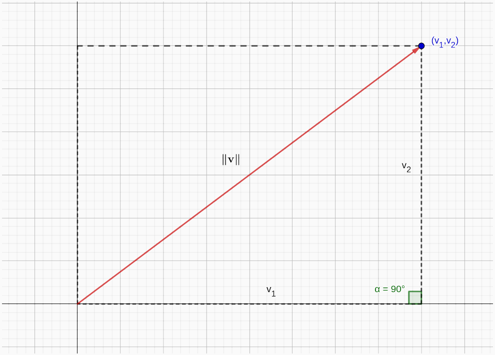
Álgebra Linear e Geometria Analítica

FACET/UFGD

Norma de um vetor [1]

Comprimento de um vetor

A **norma Euclidiana** de um vetor $\mathbf{v}$ é denotado pelo símbolo $\|\mathbf{v}\|$. Ela mede o comprimento do vetor $\mathbf{v}$ no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$.



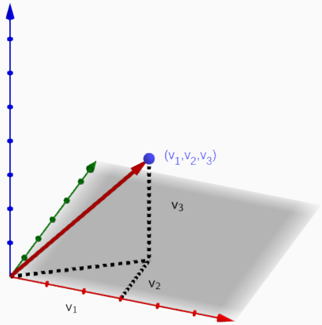
Pelo Teorema de Pitágoras, $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$.

Comprimento de um vetor

No espaço $\mathbb{R}^3$, o comprimento do vetor $\mathbf{v}$ é dado por

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}.$$

Usamos o teorema de Pitágoras duas vezes para obter este resultado.



Exemplo 1

Usando as funções descritas anteriormente, vamos calcular o comprimento de cada um dos vetores abaixo:

1. $\boldsymbol{u} = (1, 0)$
2. $\boldsymbol{v} = (-3, 2, 1)$
3. $\boldsymbol{w} = (2, 2, 1)$
4. $\boldsymbol{z} = (0, 0, 0)$

Norma de um vetor em $\mathbb{R}^n$

Definição 1

Seja $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ *um vetor em* $\mathbb{R}^n$*. Então, o* ***comprimento*** *de* $\mathbf{v}$*, também denominado* ***norma*** *ou* ***magnitude*** *de* $\mathbf{v}$*, é denotado por* $\|\mathbf{v}\|$ *e definido pela fórmula*

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2}.$$

Teorema 1

Se $\boldsymbol{v}$ é um vetor em $\mathbb{R}^n$ e se k é qualquer escalar, então:

a) $\|\boldsymbol{v}\| \geq 0$

b) $\|\boldsymbol{v}\| = 0$ *se, e somente se,* $\boldsymbol{v} = 0$

c) $\|k\boldsymbol{v}\| = |k|\|\boldsymbol{v}\|$

Distância entre Pontos

Distância entre pontos de $\mathbb{R}^n$

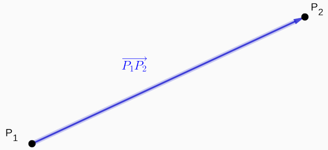
Se P_1 e P_2 são dois pontos de $\mathbb{R}^n$, então a distância entre P_1 e P_2 é o comprimento do vetor $\overrightarrow{P_1P_2}$:

$$d(P_1, P_2) = \|\overrightarrow{P_1P_2}\|.$$

Distância entre pontos de $\mathbb{R}^2$

Se $P_1(u_1, u_2)$ e $P_2(v_1, v_2)$ são dois pontos de $\mathbb{R}^2$, então a distância entre P_1 e P_2 é dada pela expressão:

$$\begin{aligned} d(P_1, P_2) &= \|\overrightarrow{P_1P_2}\| = \|(v_1 - u_1, v_2 - u_2)\| \\ &= \sqrt{(v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2}. \end{aligned}$$



Exemplo 2

A distância entre os pontos $P_1(-1, 3)$ *e* $P_2(5, -4)$ *é*

Exemplo 2

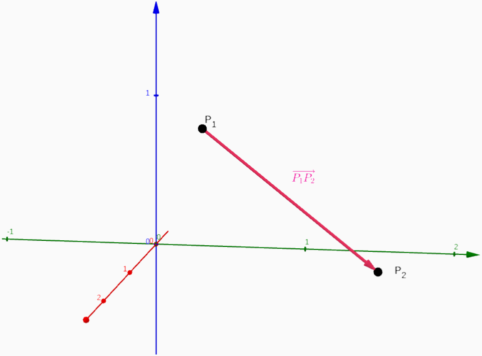
A distância entre os pontos $P_1(-1,3)$ *e* $P_2(5,-4)$ *é*

$$d(P_1,P_2) = \sqrt{(5-(-1))^2 + (-4-3)^2} = \sqrt{36+49} = \sqrt{85}.$$

Distância entre pontos de $\mathbb{R}^3$

Se $P_1(u_1, u_2, u_3)$ e $P_2(v_1, v_2, v_3)$ são dois pontos de $\mathbb{R}^3$, então a distância entre P_1 e P_2 é dada pela expressão:

$$
\begin{aligned}
d(P_1, P_2) = \|\overrightarrow{P_1P_2}\| &= \|(v_1 - u_1, v_2 - u_2, v_3 - u_3)\| \\
&= \sqrt{(v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2 + (v_3 - u_3)^2}.
\end{aligned}
$$



Exemplo 3

A distância entre os pontos $P_1(1, 3, -2)$ *e* $P_2(0, 7, 2)$ *é*

Distância entre pontos de $\mathbb{R}^3$

Exemplo 3

A distância entre os pontos $P_1(1, 3, -2)$ *e* $P_2(0, 7, 2)$ *é*

$$\begin{aligned} d(P_1, P_2) &= \sqrt{(0-1)^2 + (7-3)^2 + (2-(-2))^2} \\ &= \sqrt{1+16+16} = \sqrt{33}. \end{aligned}$$

Propriedades da Distância entre dois pontos

Teorema 2

Se $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ são pontos em $\mathbb{R}^n$, então:

1. $d(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \geq 0$;
2. $d(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = 0$ *se, e somente se,* $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$;
3. $d(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) = d(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$.

Referências

H. Anton and C. Rorres.
***Álgebra Linear com Aplicações*.**
Bookman Editora, 10 edition, 2012.