

Aula 10: Vetores no R^n

Karla Lima

Álgebra Linear e Geometria Analítica

FACET/UFGD

Produto Cartesiano

Operações Algébricas em \mathbb{R}^3

Vetores Definidos pelos Pontos Inicial e Final

Considerações Finais

Produto Cartesiano

Definição 1

*Dados $a \in A$ e $b \in B$, o par (a, b) é chamado **par ordenado**.*

Definição 1

Dados $a \in A$ e $b \in B$, o par (a, b) é chamado **par ordenado**.

- Em um par ordenado, a ordem em que os elementos aparecem é relevante: $(a, b) \neq (b, a)$.

Definição 1

Dados $a \in A$ e $b \in B$, o par (a, b) é chamado **par ordenado**.

- Em um par ordenado, a ordem em que os elementos aparecem é relevante: $(a, b) \neq (b, a)$.
- O primeiro elemento a é chamado **abcissa** e o segundo b é chamado **ordenada**.

Definição 1

Dados $a \in A$ e $b \in B$, o par (a, b) é chamado **par ordenado**.

- Em um par ordenado, a ordem em que os elementos aparecem é relevante: $(a, b) \neq (b, a)$.
- O primeiro elemento a é chamado **abcissa** e o segundo b é chamado **ordenada**.
- Dois pares ordenados (a, b) e (c, d) são iguais se, e somente se,

$$a = c \quad \text{e} \quad b = d.$$

Definição 2

O *produto cartesiano* $A \times B$ é o conjunto de todos os pares ordenados (a, b) , tais que $a \in A$ e $b \in B$; ou seja,

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ e } b \in B\}.$$

Exemplo 1

Exemplo 1

Se $A = \{2, \pi\}$ e $B = \{-15, 0, \sqrt{2}\}$, então

$$A \times B = \{(2, -15), (2, 0), (2, \sqrt{2}), (\pi, -15), (\pi, 0), (\pi, \sqrt{2})\}.$$

O Plano Cartesiano

Quando algum dos conjuntos é infinito, não conseguimos descrever todos os elementos do produto cartesiano, um por um.

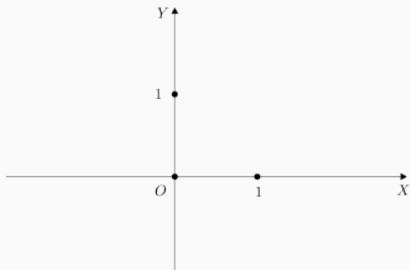
É o caso do plano cartesiano $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Só podemos representá-lo usando a definição

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) | x \in \mathbb{R} \text{ e } y \in \mathbb{R}\}.$$

ou por sua representação geométrica.

Sistema de Coordenadas Retangulares no Plano

O Plano Cartesiano é composto por duas retas, perpendiculares¹ entre si:



¹o ângulo entre as duas retas é de 90°

Definição 3

*Dados $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \dots, x_n \in A_n$, n um número natural, a sequência ordenada (x_1, x_2, \dots, x_n) é chamada ***n*-upla** (ênupla).*

Definição 3

*Dados $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \dots, x_n \in A_n$, n um número natural, a sequência ordenada (x_1, x_2, \dots, x_n) é chamada ***n*-upla** (*ênupla*).*

- Novamente, a ordem em que os elementos aparecem é relevante.

Definição 3

Dados $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \dots, x_n \in A_n$, n um número natural, a sequência ordenada (x_1, x_2, \dots, x_n) é chamada ***n-upla*** (*ênupla*).

- Novamente, a ordem em que os elementos aparecem é relevante.
- Duas n -uplas (x_1, x_2, \dots, x_n) e (y_1, y_2, \dots, y_n) são iguais se, e somente se,

$$x_i = y_i, \text{ para } i = 1, 2, \dots, n.$$

Imagens Digitalizadas

- Cada pixel (ponto da tela) é representado por informações numéricas;
- Em imagens coloridas, associamos **três valores** ao pixel:
 - Matiz (h)
 - Saturação (s)
 - Brilho (b)
- Além disso, cada pixel possui sua posição na tela:
 - Coordenadas (x, y)
- Portanto, cada pixel pode ser representado por:

$$v = (x, y, h, s, b)$$

- Uma imagem é um **conjunto dessas 5-uplas**

Circuitos Elétricos

- Um microprocessador recebe **4 voltagens de entrada**;
- Essas entradas podem ser representadas por um vetor em \mathbb{R}^4 :

$$v = (x_1, x_2, x_3, x_4)$$

- O sistema produz **3 voltagens de saída**;
- As saídas formam um vetor em \mathbb{R}^3 :

$$w = (y_1, y_2, y_3)$$

- O microprocessador pode ser visto como uma **transformação**:

$$\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

Produto Cartesiano com mais de 2 Conjuntos

Ao generalizar o conceito de par ordenado, fazemos o mesmo com produto cartesiano:

Definição 4

O *produto cartesiano* $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ é o conjunto de todas as *n-uplas* (x_1, x_2, \dots, x_n) , tais que

$$x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \dots, x_n \in A_n;$$

ou seja,

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in A_i, i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Produto Cartesiano

Quando temos $A_1 = A_2 = \dots = A_n = A$, escrevemos

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = A^n.$$

Assim,

- $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) | x \in \mathbb{R} \text{ e } y \in \mathbb{R}\}.$$

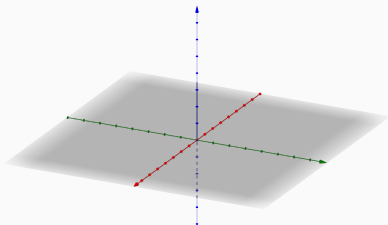
- $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$:

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) | x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \text{ e } z \in \mathbb{R}\}.$$

Operações Algébricas em \mathbb{R}^3

Sistema de Coordenadas Retangulares no Espaço [?]

Adicionando um eixo perpendicular ao plano cartesiano, obtemos a representação geométrica do sistema de coordenadas espacial \mathbb{R}^3 :



Sistema de Coordenadas Retangulares no Espaço

Dado um terno $P = (x, y, z)$ no espaço Euclidiano, para representá-lo no espaço, traçamos pelo ponto P uma reta paralela ao eixo y e uma paralela ao eixo x , e encontramos o ponto $(x, y, 0)$ no plano XY contido no espaço \mathbb{R}^3 .

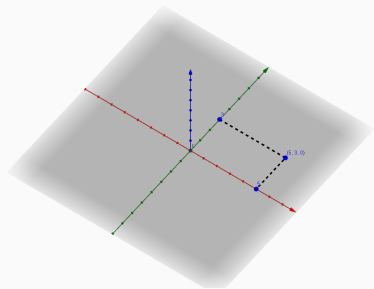


Figura 1: Vista de cima

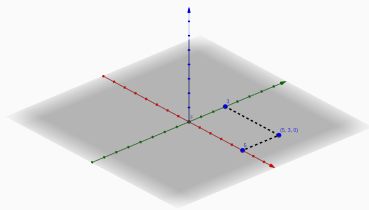
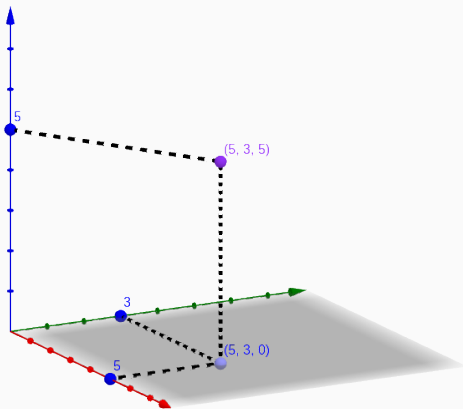


Figura 2: Vista lateral

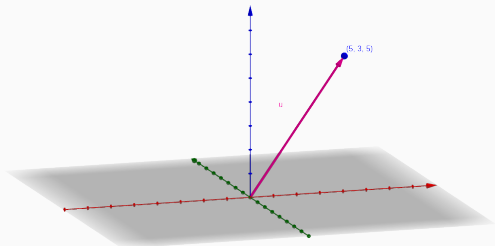
Sistema de Coordenadas Retangulares no Espaço

Em seguida, adicionamos a altura z a este ponto, obtendo a representação do ponto (x, y, z) :



Representação Vetorial no Espaço

Novamente, os ternos ordenados (x, y, z) são usados tanto para representar pontos quanto vetores no espaço. Os vetores $\mathbf{u} = (x, y, z)$ têm início na origem do sistema de coordenadas $(0, 0, 0)$ e final no ponto (x, y, z) .



Em azul o ponto $A = (5, 3, 5)$ e em rosa o vetor \mathbf{u} , que tem início na origem $(0, 0, 0)$ e final em A .

Operações algébricas com vetores no espaço

Dados dois vetores no espaço $\mathbf{u} = (a, b, c)$ e $\mathbf{v} = (d, e, f)$, e k um número real, efetuamos as seguintes operações:

Soma entre vetores: $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (a + d, b + e, c + f)$;

Subtração entre vetores: $\mathbf{u} - \mathbf{v} = (a - d, b - e, c - f)$;

Multiplicação por escalar: $k\mathbf{u} = (ka, kb, kc)$.

Por fim, qualquer que seja o número inteiro n , as operações acima descritas estão definidas.

Dados dois vetores no espaço \mathbb{R}^n $\mathbf{u} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $\mathbf{v} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, e k um número real, efetuamos as seguintes operações:

Soma: $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$;

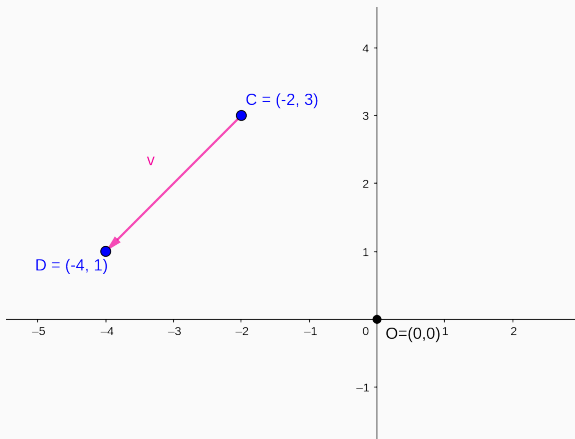
Subtração: $\mathbf{u} - \mathbf{v} = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, \dots, x_n - y_n)$;

Multiplicação por escalar: $k\mathbf{u} = (kx_1, kx_2, \dots, kx_n)$.

Vetores Definidos pelos Pontos Inicial e Final

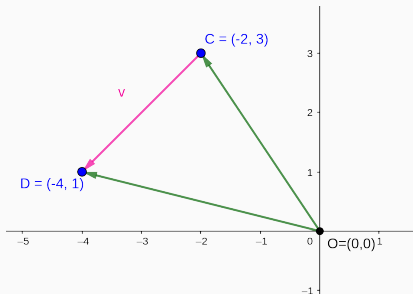
Definindo Vetores

Quando o vetor v não possui início na origem do sistema, devemos descrevê-lo através dos seus pontos inicial e final.



Representação Vetorial no Plano

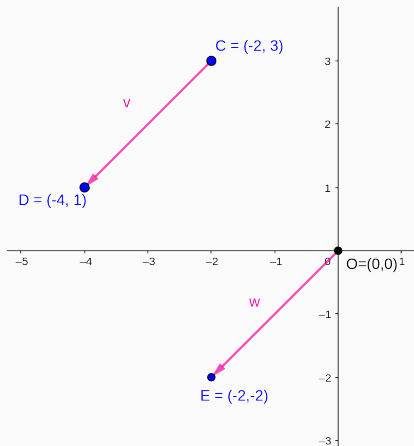
Conforme a figura abaixo sugere, podemos expressar o vetor \mathbf{v} em termos dos vetores \overrightarrow{OC} e \overrightarrow{OD} :



$$\mathbf{v} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = (-4 - (-2), 1 - 3) = (-2, -2)$$

Representação Vetorial no Plano

Com isso, obtemos a representação em coordenadas do vetor equivalente a \overrightarrow{CD} , porém com origem em $(0, 0)$:



Isso vale em qualquer espaço \mathbb{R}^n . Quando o vetor \mathbf{v} não possui início na origem do sistema, devemos descrevê-lo através dos seus pontos inicial e final, P_i e P_f respectivamente. Fazendo

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{OP_f} - \overrightarrow{OP_i}$$

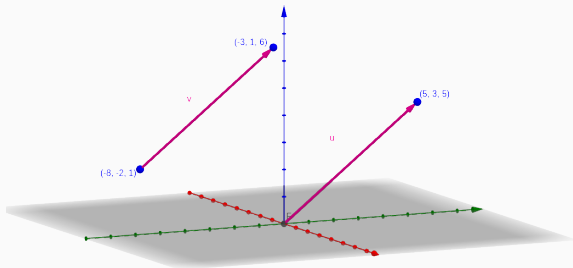
obtemos a representação em coordenadas do vetor equivalente a \mathbf{v} , porém com o ponto inicial na origem do sistema.

Exemplo 2

Exemplo 2

O vetor v , com ponto inicial $(-8, -2, 1)$ e ponto final $(-3, 1, 6)$ tem sua representação em coordenadas dada por

$$(-3, 1, 6) - (-8, -2, 1) = (5, 3, 5).$$



Considerações Finais

O que aprendemos

- Vimos o que são produtos cartesianos e como os espaços euclidianos \mathbb{R}^n , n um número natural, são obtidos através desses produtos de conjuntos.
- Estendemos o conceito das operações básicas de vetores (soma e multiplicação por uma escalar) para vetores com mais de 2 coordenadas.
- Vimos como obter uma representação do vetor \mathbf{v} com pontos inicial e final P_i e P_f , respectivamente, dado por:

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{OP_f} - \overrightarrow{OP_i}.$$

