Álgebra Linear - Aula

Título

Profª Dra. Karla Lima

Sumário

Exemplo

Considere as matrizes equivalentes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 8 & 2 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 9 & 7 \\ -1 & 3 & -4 & 2 & -5 & -4 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exemplo — Bases correspondentes

Exemplo

Usando o WolframAlpha (clique aqui):

1. *Determinar o* ***espaço coluna de*** A. *Para isso, peça para o Wolfram te indicar quais vetores colunas de* A *são L.I. Escreva "are the vectors* $\{($ *escreva os vetores coluna aqui* $)\}$ *linearly independent?"*
2. *Indique a base deste espaço e determine a* ***dimensão do espaço coluna de*** A.

Exemplo — Bases correspondentes (colunas pivô)

Exemplo

Usando o WolframAlpha (clique aqui):

1. *Verifique que as colunas correspondentes em B formam uma base do **espaço coluna de** B.*

Bases Correspondentes

Nos exemplos anteriores, utilizamos o WolframAlpha para identificar conjuntos de colunas linearmente independentes em A e em sua matriz equivalente B.

Percebemos que:

- As colunas selecionadas em A formam uma base do espaço coluna de A;
- As colunas correspondentes em B, que mantêm os mesmos índices, também formam uma base do espaço coluna de B;
- A dimensão do espaço coluna permanece inalterada.

Essa observação mostra que, ao passarmos de uma matriz A para uma matriz B equivalente por linhas, não apenas a independência linear das colunas é preservada, mas também os conjuntos que formam uma base do espaço coluna.

A partir dessa ideia intuitiva, podemos enunciar o resultado formal sobre **bases de colunas em matrizes equivalentes**.

Vetores Coluna de Matrizes Equivalentes

Teorema (Vetores coluna de matrizes equivalentes)

Sejam A e B matrizes equivalentes por linhas. Então um conjunto qualquer de vetores coluna de A forma uma base do espaço coluna de A se, e somente se, o conjunto de vetores coluna correspondente de B forma uma base do espaço coluna de B.

Demonstração:

Seja $\{A_{j_1}, \ldots, A_{j_r}\} \subset \{A_1, \ldots, A_n\}$ uma base do espaço coluna de A. Isso significa que:

- o conjunto é linearmente independente;
- gera todo o espaço coluna de A.

As colunas correspondentes em B são $\{B_{j_1}, \ldots, B_{j_r}\} \subset \{B_1, \ldots, B_n\}$.

Demonstração

Independência Linear

Como vimos antes, $B = EA$ e E é invertível, cada coluna de B é combinação linear das colunas de A:

$$B_j = EA_j.$$

Como $\{A_{j_1}, \ldots, A_{j_r}\}$ é linearmente independente, segue do Teorema **??** que $\{B_{j_1}, \ldots, B_{j_r}\}$ também é L.I.

Conjunto Gerador:

Como $\{A_{j_1}, \ldots, A_{j_r}\}$ gera Col(A), qualquer coluna A_j pode ser escrita como

$$A_j = d_1 A_{j_1} + \cdots + d_r A_{j_r}.$$

Multiplicando ambos os lados por E, obtemos

$$B_j = EA_j = d_1 B_{j_1} + \cdots + d_r B_{j_r},$$

ou seja, $\{B_{j_1}, \ldots, B_{j_r}\}$ gera Col(B).

Conclusão:

$$\{A_{j_1}, \ldots, A_{j_r}\} \text{ base de Col}(A) \iff \{B_{j_1}, \ldots, B_{j_r}\} \text{ base de Col}(B).$$

Nova Seção

1. **Bases dos Espaços Linha e Coluna**

2. O Posto de uma Matriz

Exemplo

Considere as matrizes equivalentes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 8 & 2 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 9 & 7 \\ -1 & 3 & -4 & 2 & -5 & -4 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Exemplo

Verifique que as linhas não nulas com pivôs da matriz B formam uma base do espaço linha.

As três primeiras linhas com pivôs são L.I. e a demais é nula:

$$\begin{aligned} L_1 &= [1\ \ -3\ \ 4\ \ -2\ \ 5\ \ 4], \\ L_2 &= [0\ \ 0\ \ 1\ \ 3\ \ -2\ \ -6], \\ L_3 &= [0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 5]. \end{aligned}$$

Conclusão:

$$\{\, L_1,\ L_2,\ L_3 \,\}$$

é uma base do espaço linha de B, isto é,

$$\mathrm{Linha}(B) = ger\{L_1, L_2, L_3\}.$$

Base do Espaço Linha

No exemplo anterior, observamos que, ao escalonar a matriz A para obter B, as linhas não nulas com pivôs fornecem informações essenciais sobre o espaço linha.

Essas linhas:

- São linearmente independentes;
- Geram todas as combinações lineares possíveis das linhas da matriz;
- Portanto, formam uma base do espaço linha de B.

Essa ideia nos mostra que, ao trabalharmos com uma matriz escalonada, podemos identificar de maneira direta uma base do espaço linha apenas olhando para os vetores linha não nulos com pivôs.

A partir dessa observação intuitiva, chegamos ao resultado formal a seguir.

Base do Espaço Linha

Teorema

Se uma matriz B está na forma escalonada por linhas, então os vetores linha com os pivôs (vetores linhas não nulos) formam uma base de espaço linha de B.

Teorema

Se uma matriz B está na forma escalonada por linhas, então os vetores linha com os pivôs (vetores linhas não nulos) formam uma base de espaço linha de B.

Demonstração: Na forma escalonada por linhas,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & p_1 & * & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & p_2 & * & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & p_r & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $p_1, \ldots, p_r$ são os *pivôs* (cada $p_i = 1$), localizados nas colunas $j_1 < \cdots < j_r$.
- As entradas "$*$" são valores arbitrários (podem ser zero).
- Todas as entradas à **esquerda** de cada pivô são zero.

Demonstração

Dessa forma, os vetores linha

$$\mathbf{v}_1 = (0, \cdots, 0, p_1, *, *, \cdots, *)$$
$$\vdots$$
$$\mathbf{v}_r = (0, \cdots, 0, 0, \cdots, 0, p_r, *),$$

formam um conjunto L.I., pois nenhuma linha pode ser combinação linear da outra, por causa da posição dos pivôs.

Como os vetores nulos não contribuem para gerar o espaço linha, $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ é quem gera o espaço linha de B. Como é um conjunto L.I. e gera, ele é uma base para o espaço linha.

Exemplo

Considere novamente as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 8 & 2 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 9 & 7 \\ -1 & 3 & -4 & 2 & -5 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

1. *Identifique as colunas pivô de B. São as colunas 1, 3 e 5.*
2. *Observe que as colunas correspondentes em A são* A_1, A_3 *e* A_5.
3. *Esses vetores coluna de A formam uma base do espaço coluna de A, pois são L.I. e geram todas as colunas de A como combinações lineares.*

Base do Espaço Coluna

No exemplo, percebemos que, ao escalonar A para obter B, as colunas pivô de B apontam diretamente para as colunas de A que geram todo o espaço coluna.

Ou seja:

- As colunas de A correspondentes às colunas pivô de B são linearmente independentes;
- Elas geram todas as colunas de A como combinações lineares;
- Portanto, fornecem uma base do espaço coluna de A.

Essa observação motivadora nos leva à formulação do teorema a seguir.

Base do Espaço Coluna

Teorema

Se uma matriz B está na forma escalonada por linhas, então os vetores coluna com os pivôs vetores linhas formam uma base de espaço coluna de B.

Teorema

Se uma matriz B está na forma escalonada por linhas, então os vetores coluna com os pivôs vetores linhas formam uma base de espaço coluna de B.

Demonstração: Na forma escalonada por linhas, novamente temos

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & p_1 & * & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & p_2 & * & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & p_r & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $p_1, \ldots, p_r$ são os *pivôs* (cada $p_i = 1$), localizados nas colunas $j_1 < \cdots < j_r$.
- As entradas "$*$" são valores arbitrários (podem ser zero).
- Todas as entradas à **esquerda** de cada pivô são zero.

Demonstração

Dessa forma, os vetores coluna

$$\mathbf{w}_1 = (p_1, 0, 0, \cdots, 0)$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{w}_r = (*, *, *, , *, \cdots, p_r, 0),$$

formam um conjunto L.I., pois nenhuma coluna pode ser combinação linear da outra, por causa da posição dos pivôs.

As outras colunas que não possuem pivôs, como a coluna

$$\mathbf{w}_{r+1} = (*, \cdots, *, *, *, *, 0),$$

pode ser escrita como combinação linear de $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_r$.

Como os vetores nulos não contribuem para gerar o espaço linha, $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_r\}$ é quem gera o espaço coluna de B. Como é um conjunto L.I. e gera, ele é uma base para o espaço linha.

1 Bases dos Espaços Linha e Coluna

2 O Posto de uma Matriz

Teorema

O espaço coluna de A tem a mesma dimensão que o espaço linha.

Como B está na forma escalonada, o número de pivôs é 3:

$$\text{pivôs nas colunas } 1, 3, 5.$$

Assim,

$$\text{posto}(A) = 3 = \dim(\text{Row}(A)) = \dim(\text{Col}(A)).$$

Aplicando à matriz: As colunas correspondentes em A formam uma base do espaço coluna:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 9 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_5 = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 9 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Logo, $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_5\}$ é uma base de $\text{Col}(A)$.

Base do Espaço Coluna

Teorema

As colunas de A correspondentes às colunas pivô de B formam uma base do espaço coluna de A.

Pelas posições dos pivôs (colunas 1, 3 e 5), temos:

$$\text{Base de Col}(A) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 9 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 9 \\ -5 \end{bmatrix} \right\}.$$

Esses vetores são linearmente independentes e geram o espaço coluna.

- A e B são equivalentes por linhas ($B = EA$ com E invertível).
- $\text{Nul}(A) = \text{Nul}(B)$.
- $\text{Row}(A) = \text{Row}(B)$.
- $\dim(\text{Row}(A)) = \dim(\text{Col}(A)) = 3$.
- Bases:

$$\text{Row}(A) : \{\ell_1, \ell_2, \ell_3\}$$

$$\text{Col}(A) : \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_5\}$$

Referências I