Aula 09: Vetores em Espaços Euclidianos

Karla Lima

Álgebra Linear e Geometria Analítica

FACET/UFGD

Grandezas Físicas

Grandezas Escalares

- Qual a sua massa? **R:** 60 kg
- Que horas são? **R:** 8 hs
- Qual a sua temperatura corporal atual? **R:** $36°\mathrm{C}$

Grandezas Escalares

- Qual a sua massa? **R:** 60 kg
- Que horas são? **R:** 8 hs
- Qual a sua temperatura corporal atual? **R:** 36°C

Para responder a estas perguntas, basta apenas um número, sem que outras informações precisem ser adicionadas.

Grandezas Vetoriais

- Como localizar um carro a 100 km/h, na BR101?
- Como encontrar um barco perdido no oceano Atlântico?
- Como localizar um avião que está a uma velocidade de 800 km/h?

Grandezas Vetoriais

- Como localizar um carro a 100 km/h, na BR101?
- Como encontrar um barco perdido no oceano Atlântico?
- Como localizar um avião que está a uma velocidade de 800 km/h?

Para responder a estas perguntas, além do valor escalar, precisamos indicar uma **direção** e um **sentido**.

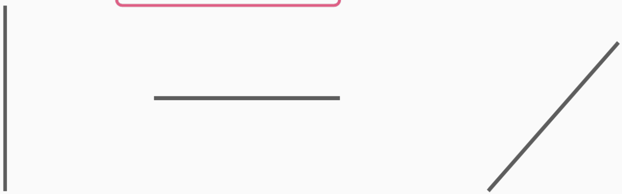
Grandezas Vetoriais

- Como encontrar um barco perdido no oceano Atlântico?
  $\rightsquigarrow$Precisamos saber a rapidez, a direção e o sentido em que este barco se deslocou. Só a velocidade escalar (rapidez) não é suficiente!

- Como localizar um avião que está a uma velocidade de 800 km/h?
  $\rightsquigarrow$Aqui, além da rapidez que já foi dada, precisamos saber a direção e o sentido em que este avião se deslocou.

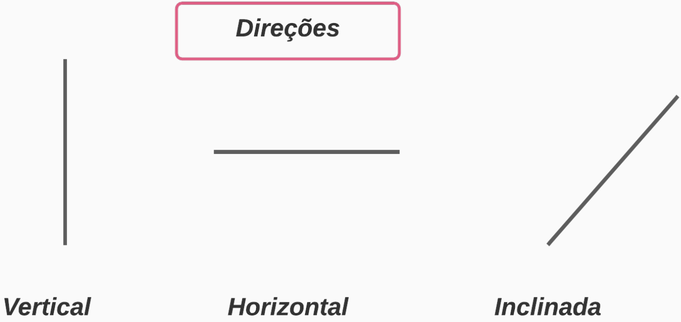
Direção: exemplos

Direções



Vertical ***Horizontal*** ***Inclinada***

Direção: exemplos



Como nos deslocamos em cima dessas retas?

Sentido: exemplos

O sentido nos diz como estamos nos deslocando na direção dada.

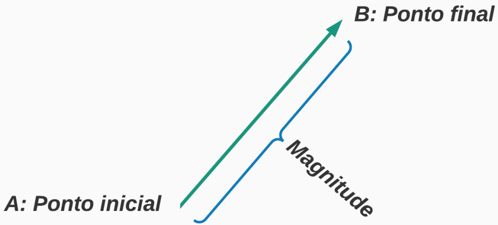
Sentido: exemplos

Na mesmas direções, mas com sentidos opostos, temos:

Vetores - Geometria

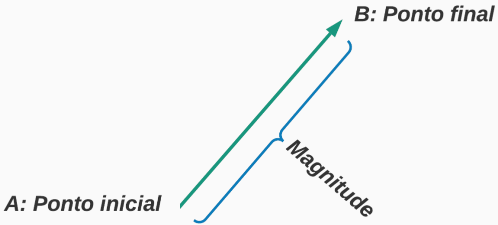
Representação de Vetores

Um vetor é representado através de uma flecha (seta):



Representação de Vetores

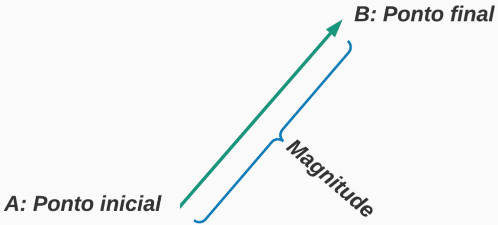
Um vetor é representado através de uma flecha (seta):



Com essa representação, conseguimos as seguintes informações sobre o vetor:

TAMANHO DIREÇÃO SENTIDO

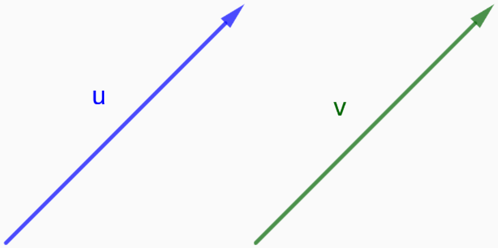
Representação de Vetores



- O tamanho(magnitude) é dado pelo comprimento da seta.
- A direção é dada pelo corpo da seta.
- O sentido é dado pela ponta da seta.

Equivalência de Vetores [1]

Dois vetores são **equivalentes** (ou **equipolentes**) se possuem o mesmo tamanho, a mesma direção e mesmo sentido:



Equivalência de Vetores

Os vetores abaixo possuem a mesma direção e a mesma magnitude, porém, os sentidos não são equivalentes.

Portanto, os vetores são diferentes.

Equivalência de Vetores

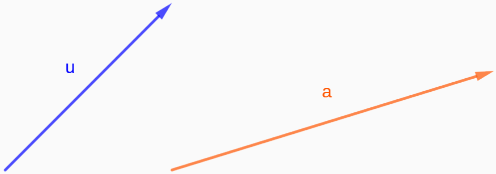
Os vetores abaixo possuem a mesma direção e a mesma magnitude, porém, os sentidos não são equivalentes.

Portanto, os vetores são diferentes.

Quando os vetores têm a mesma direção e a mesma magnitude, mas sentidos diferentes, dizemos que os vetores são **opostos**.

Equivalência de Vetores

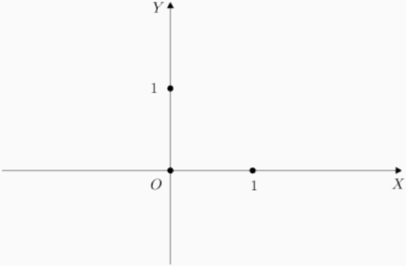
Os dois vetores abaixo são diferentes, pois todas as suas características são distintas.



Vetores em Sistemas de Coordenadas

Sistema de Coordenadas Retangulares no Plano

O Plano Cartesiano é composto por duas retas, perpendiculares[1] entre si:



Chama-se **origem** do plano cartesiano, o ponto $O = (0, 0)$.

[1] o ângulo entre as duas retas é de 90°

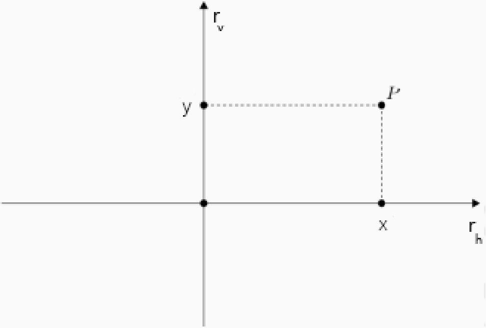
Sistema de Coordenadas Retangulares no Plano

i) Na horizontal, escolhe-se um ponto para representar o número 0, e os números positivos são colocados à direita, enquanto os negativos à esquerda do 0.

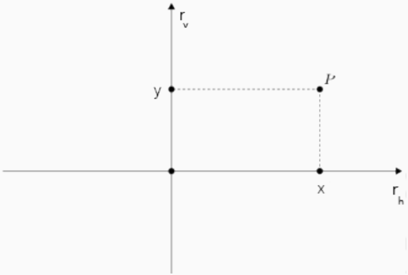
ii) Na vertical, escolhe-se um ponto para representar o número 0 (coincidindo com o 0 da reta horizontal), e os números positivos são colocados acima, enquanto os negativos abaixo do 0.

Sistema de Coordenadas Retangulares no Plano

A identificação de um ponto P do plano está em função da sua distância até a reta vertical (r_v) e sua distância até a reta horizontal (r_h): $P = (x, y)$.



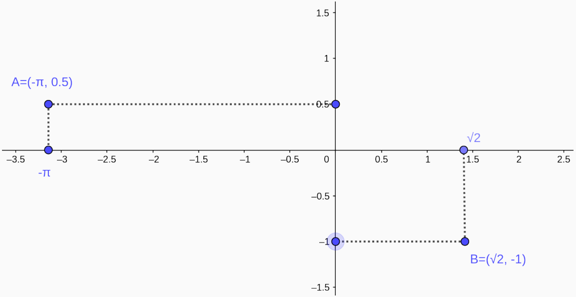
Sistema de Coordenadas Retangulares no Plano



- Se x estiver à direita da origem, temos $x =$ distância à r_v; caso contrário, temos temos $x = -$ (distância à r_v).
- Analogamente, se y estiver acima da origem, temos $y =$ distância à r_h; caso contrário, temos temos $y = -$ (distância à r_v).

Exemplo 3.1

Os pontos $A = (-\pi, 0.5)$ e $B = (\sqrt{2}, -1)$ no plano cartesiano:

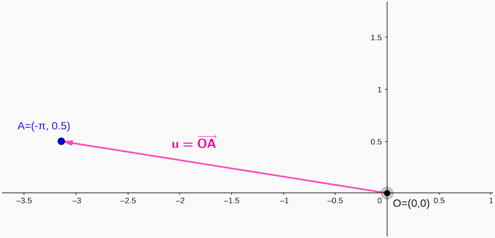


Representação Vetorial no Plano

Os pares ordenados (x, y) são usados tanto para representar pontos quanto vetores no plano. Portanto, deve ser enfatizado o ponto de vista geométrico desejado.

Os vetores $\mathbf{u} = (x, y)$ têm início na origem do sistema de coordenadas $(0, 0)$ e final no ponto (x, y).

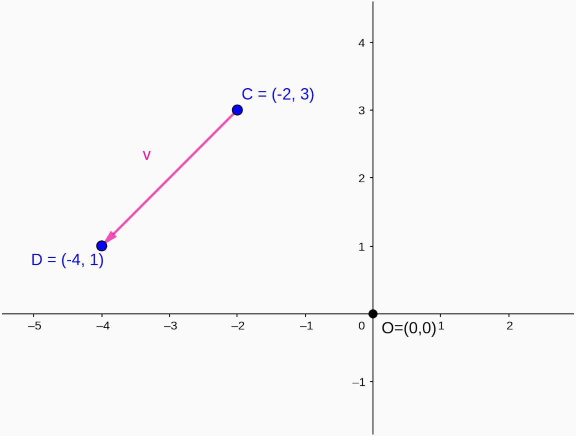
Exemplo 3.2



Em azul, o ponto $A = (-\pi, 0.5)$; em rosa, o vetor $\boldsymbol{u}$, que tem início na origem $(0, 0)$ e final em A.

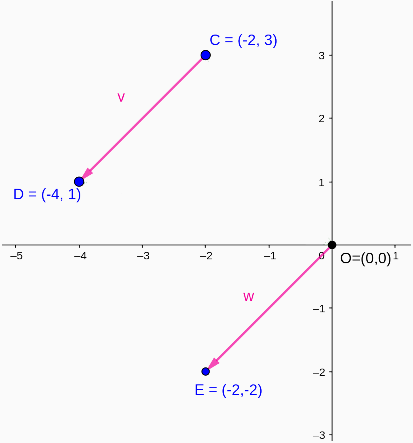
Representação Vetorial no Plano

Quando o vetor **v** não possui início na origem do sistema, devemos descrevê-lo através dos seus pontos inicial e final.

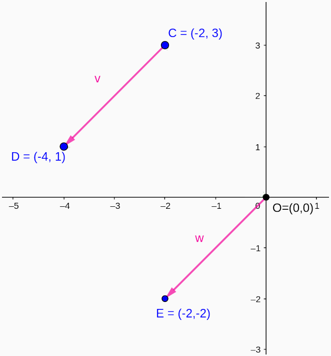


Representação Vetorial no Plano

O vetor $\mathbf{w} = \overrightarrow{OE}$ é equivalente ao vetor $\mathbf{v}$, onde seu ponto inicial é a origem $(0, 0)$.



Representação Vetorial no Plano



Na álgebra dos vetores, costumamos utilizar o vetor equivalente ao vetor dado, que tem seu ponto inicial na origem. Então, se queremos identificar o vetor $\overrightarrow{CD}$, o identificamos como sendo: $\overrightarrow{CD} = (-2, -2)$.

O Vetor Nulo

Denotamos por $\mathbf{0}$ o vetor que tem comprimento igual a 0, não possui nem direção nem sentido. Em $\mathbb{R}^2$, é representado por $\mathbf{0} = (0, 0)$.

Considerações Finais

Questionamentos

1. Qual a diferença entre grandezas escalares e vetoriais?
2. Força é um agente que modifica o movimento de um corpo livre ou causa deformação num corpo fixo.
   A partir dessa definição, concluímos que Força é uma quantidade escalar ou vetorial?
3. O comprimento é uma grandeza escalar ou vetorial?

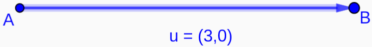
Questionamentos

4. Direção e sentido significam a mesma coisa?
5. Dois vetores são equipolentes apenas se possuem o mesmo ponto inicial e final?
6. Você consegue determinar onde os pontos $(-2, 6)$ e $(5, 5)$ estão no plano $\mathbb{R}^2$?

Soma de Vetores em $\mathbb{R}^2$

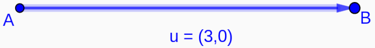
Soma de Vetores

Vamos pensar em deslocamento. Suponha que uma pessoa se desloca do ponto A ao ponto B, na direção e sentido do vetor $\mathbf{u}$:

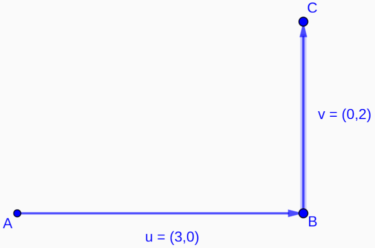


Soma de Vetores

Vamos pensar em deslocamento. Suponha que uma pessoa se desloca do ponto A ao ponto B, na direção e sentido do vetor $\mathbf{u}$:

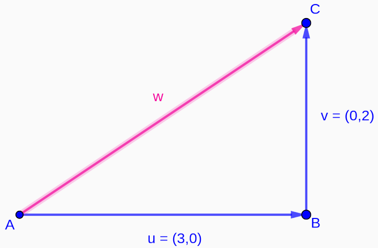


Logo após, a pessoa se desloca do ponto B ao ponto C, na direção e sentido do vetor $\mathbf{v}$:



Soma de Vetores

Qual a direção e sentido do vetor deslocamento resultante $\mathbf{w} = \overrightarrow{AC}$?



Soma de Vetores

Nos espaços euclidianos, as variações são dadas através dos eixos horizontal e vertical.

Soma de Vetores

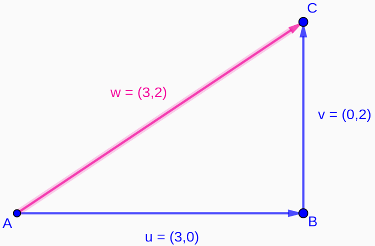
Nos espaços euclidianos, as variações são dadas através dos eixos horizontal e vertical.

Neste exemplo:

- o 1 deslocamento é apenas horizontal, de 3 unidades;
- ao chegar ao ponto B, não alteramos o deslocamento horizontal, que fica fixo em 3 unidades;
- a partir deste ponto, o deslocamento é apenas vertical, de 2 unidades.

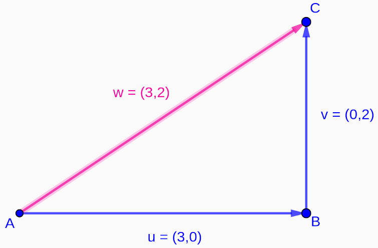
Soma de Vetores

Portanto, o deslocamento resultante na direção horizontal foi de 3 unidades e na direção vertical de 2 unidades (ambas na direção positiva):



Soma de Vetores

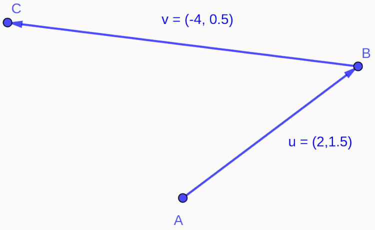
Portanto, o deslocamento resultante na direção horizontal foi de 3 unidades e na direção vertical de 2 unidades (ambas na direção positiva):



A direção e sentido do deslocamento resultante é dado pelo vetor $\mathbf{w} = (3, 2)$.

Exemplo 5.1

Suponha que uma pessoa se desloca do ponto A ao ponto B, na direção e sentido do vetor $\boldsymbol{u} = (2, 1.5)$, e do ponto B ao ponto C, na direção e sentido do vetor $\boldsymbol{v} = (-4, 0.5)$:



Qual a direção e sentido do vetor deslocamento resultante $\boldsymbol{w} = \overrightarrow{AC}$?

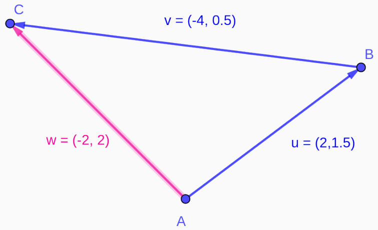
Solução: Exemplo 5.1

Note que:

- De A até B, o deslocamento na horizontal foi de 2 unidades positivas (sentido para a direita); de B até C, o deslocamento na horizontal foi de 4 unidades negativas (sentido para a esquerda). Logo, o deslocamento resultante na horizontal é de 2 $(= 2 + (-4))$ unidades para a esquerda: $x = -2$;
- De A até B, o deslocamento na vertical foi de 1.5 unidades positivas (sentido para a cima); de B até C, o deslocamento na vertical continuou sendo para cima, de 0.5 unidade. Logo, o deslocamento resultante na vertical é de 2 $(= 1.5 + 0.5)$ unidades para a cima: $y = 2$.

Solução: Exemplo 5.1

Portanto, a direção e sentido do deslocamento resultante é dado pelo vetor $\mathbf{w} = (-2, 2)$.



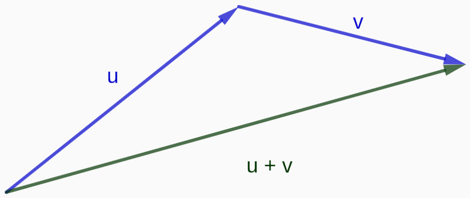
Definição 5.1

Dados dois vetores no plano $\mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{u} = (a, b)$ *e* $\boldsymbol{v} = (c, d)$, *definimos a* ***soma de vetores*** $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ *por*

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = (a + c, b + d).$$

Soma de Vetores - Geometria

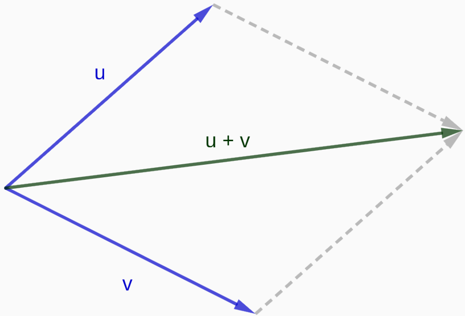
Para **somar dois vetores**, $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, devemos unir ao ponto final de $\mathbf{u}$ o ponto inicial de $\mathbf{v}$. Com isso, a soma $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ é representada pelo vetor cujo ponto inicial coincide com o de $\mathbf{u}$ e ponto final coincide com o de $\mathbf{v}$, formando um **triângulo**:



Regra do triângulo

Soma de Vetores - Geometria

Se o pontos iniciais dos vetores **u** e **v** coincidem, então os dois vetores formam lados adjacentes de um paralelogramo e a soma $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ é representada pela diagonal do paralelogramo abaixo:



Regra do paralelogramo

Multiplicação de um Vetor por um Escalar em $\mathbb{R}^2$

Multiplicação por Escalar

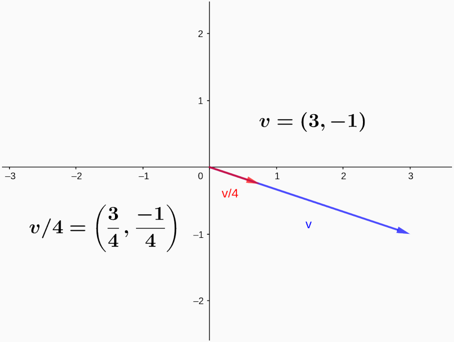
Continuamos a definir as operações em função dos eixos horizontal e vertical.

Dado um vetor não nulo v, mantendo a sua direção, podemos "esticar" ou "encolher" o seu tamanho. Além disso, podemos mudar o sentido percorrido pelo vetor.

Para isso, efetuamos uma operação de multiplicação, envolvendo o vetor v e um número real k.

Multiplicação por Escalar

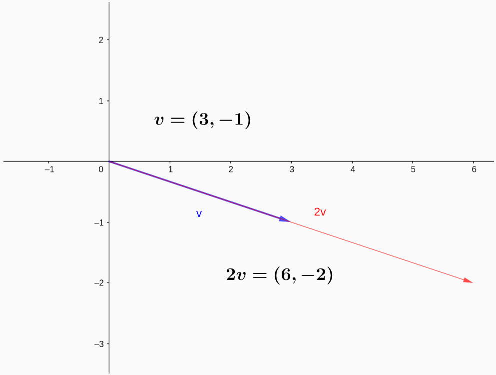
Se queremos um novo vetor $\mathbf{v}/4$, que possui a mesma direção e o mesmo sentido de $\mathbf{v} = (3, -1)$, mas com $\frac{1}{4}$ do tamanho de $\mathbf{v}$, basta multiplicar[2] cada coordenada de $\mathbf{v}$ por $\frac{1}{4}$:



[2]Lembre-se: dividir por um número $a \neq 0$ é o mesmo que multiplicar por $\frac{1}{a}$

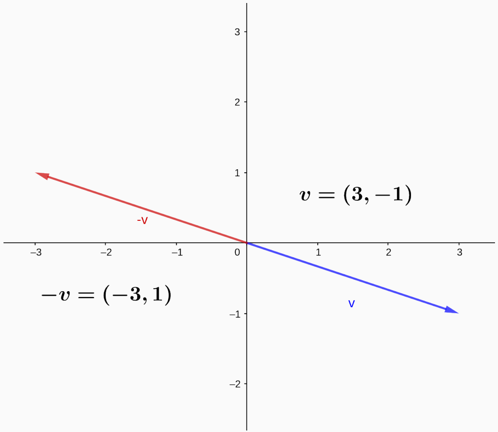
Multiplicação por Escalar

Agora, se queremos um novo vetor 2**v**, que possui a mesma direção e o mesmo sentido de $\mathbf{v} = (3, -1)$, mas com o dobro do tamanho de **v**, basta multiplicar cada coordenada de **v** por 2:



Multiplicação por Escalar

Já para inverter o sentido do vetor **v**, mantendo sua direção e tamanho, basta multiplicar cada coordenada de **v** por -1:



Definição 6.1

Se $\mathbf{v} = (a, b)$ *é um vetor não-nulo e* k *é um escalar não nulo, então o* ***múltiplo escalar*** *de* $\mathbf{v}$ *por* k *é o vetor que:*

1. *Possui a mesma direção de* $\mathbf{v}$*;*
2. *Se* $k > 0$*, então possui o mesmo sentido de* $\mathbf{v}$*; se* $k < 0$*, então possui o sentido oposto de* $\mathbf{v}$*;*
3. [3] *O comprimento é* $|k|$ *vezes o comprimento de* $\mathbf{v}$*.*

Escrevemos: $k\mathbf{v} = (k \cdot a, k \cdot b)$*.*

[3] $|\cdot|$ é a função módulo de um número real

Definição: Multiplicação por Escalar

Se $k = 0$ então $k\mathbf{v}$ é o **vetor nulo**, qualquer que seja o vetor $\mathbf{v}$;

No caso em que $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, temos $k\mathbf{v} = \mathbf{0}$, e a multiplicação resulta ainda no vetor nulo, qualquer que seja $k \in \mathbb{R}$.

Subtração de Vetores em $\mathbb{R}^2$

Subtração Vetorial

O vetor diferença de $\mathbf{u}$ com $\mathbf{v}$, denotado por $\mathbf{u} - \mathbf{v}$, é definido como sendo a soma:

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v}).$$

Subtração Vetorial

O vetor diferença de $\mathbf{u}$ com $\mathbf{v}$, denotado por $\mathbf{u} - \mathbf{v}$, é definido como sendo a soma:

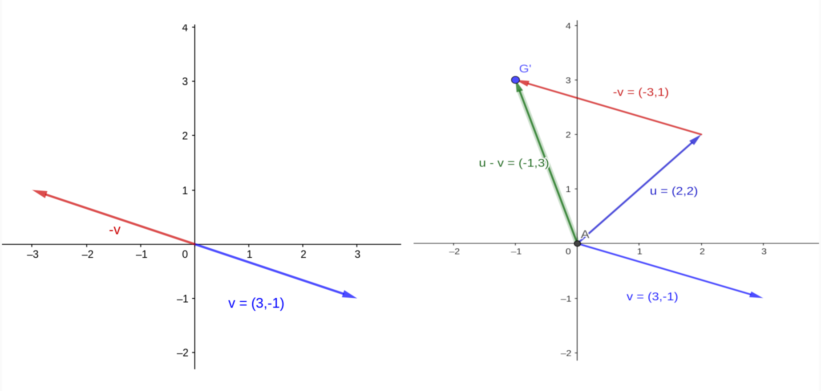
$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v}).$$

Ou seja, ao fazermos $\mathbf{u} - \mathbf{v}$, estamos adicionando ao vetor $\mathbf{u}$ o vetor oposto de $\mathbf{v}$.

Subtração Vetorial

Exemplo 7.1

Dados os vetores $\boldsymbol{u} = (2, 2)$ *e* $\boldsymbol{v} = (3, -1)$, *o vetor* $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$ *é dado por:* $(2, 2) + (-3, 1) = (2 - 3, 2 + 1) = (-1, 3)$.



Considerações Finais

Questionamentos

1. Ao jogar "cabo de guerra", cada grupo (2, no total) exerce uma força que puxa a corda para o seu lado. Se $\overrightarrow{F}_1$ e $\overrightarrow{F}_2$ são as forças exercidas por cada grupo, a força resultante é determinada por qual operação vetorial?

O que aprendemos

- O conceito de vetor.
- A direção de um vetor é determinado por uma reta (e suas inclinações) e o sentido desse vetor é como nos deslocamos em cima desta mesma reta.
- Algumas relações entre vetores: vetores equivalentes ("iguais") e vetores opostos (apenas o sentido é diferente).
- A representação de um vetor num espaço de coordenadas retangulares. Este espaço é chamado de **Espaço Euclidano**, ou mais concisamente, $\mathbb{R}^2$.

O que aprendemos

- As operações de soma e subtração, envolvem dois vetores em $\mathbb{R}^2$ e resultam em um novo vetor, também em $\mathbb{R}^2$:

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad \mathbf{u} - \mathbf{v} : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

- Já a operação de multiplicação por escalar, envolve um vetor de $\mathbb{R}^2$ e um escalar que resulta em um novo vetor em $\mathbb{R}^2$:

$$k \cdot \mathbf{v} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

Referências

H. Anton and C. Rorres.
***Álgebra Linear com Aplicações*.**
Bookman Editora, 10 edition, 2012.