Álgebra Linear - Aula 08

Espaço Linha, Espaço Coluna e Espaço Nulo

Profª Dra. Karla Lima

Sumário

Espaço Linha [1]

Definição 1.1

Se A for uma matriz $m \times n$, então o subespaço de R^n gerado pelos vetores linha de A é denominado ***espaço linha*** *de A.*

Espaço Linha

Exemplo 1.1

Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

Os vetores linha são $(1, 2, 3)$ *e* $(2, 4, 6)$*. Qual o espaço gerado por esses vetores?*

Espaço Linha

Exemplo 1.1

Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

Os vetores linha são $(1, 2, 3)$ *e* $(2, 4, 6)$. *Qual o espaço gerado por esses vetores?*

- Use o Geogebra para descobrir:

https://www.geogebra.org/classroom/vpjdh7g4

Exemplo 1.2

Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Os vetores linha são $(1, 0)$ *e* $(1, 1)$. *Qual o espaço gerado por esses vetores?*

Espaço Linha

Exemplo 1.2

Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Os vetores linha são $(1, 0)$ *e* $(1, 1)$. *Qual o espaço gerado por esses vetores?*

- Use o Geogebra para descobrir:

https://www.geogebra.org/classroom/rbhjdj7m

Definição 1.2

Se A for uma matriz $m \times n$, então o subespaço de R^m gerado pelos vetores coluna de A é denominado ***espaço coluna*** *de A.*

Exemplo 1.3

Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

Os vetores coluna são $(1, 2)$*,* $(2, 4)$ *e* $(3, 6)$*. Qual o espaço gerado por esses vetores?*

Exemplo 1.3

Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

Os vetores coluna são $(1, 2)$, $(2, 4)$ *e* $(3, 6)$. *Qual o espaço gerado por esses vetores?*

- Use o Geogebra para descobrir:

https://www.geogebra.org/classroom/nwbwdgzt

Exemplo 1.4

Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Os vetores coluna são $(1, 1)$ *e* $(0, 1)$*. Qual o espaço gerado por esses vetores?*

© Profª Dra. Karla Lima

Exemplo 1.4

Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Os vetores coluna são $(1, 1)$ *e* $(0, 1)$. *Qual o espaço gerado por esses vetores?*

- Use o Geogebra para descobrir:

  https://www.geogebra.org/classroom/ufspkqmm

Espaço Nulo

Definição 1.3

O espaço solução do sistema homogêneo de equações $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, que é um subespaço de $\mathbb{R}^n$, é denominado ***espaço nulo*** *de A.*

Nova Seção

1 Definições

2 **Relação entre Espaços Linha e Coluna e os Sistemas**

Questão 1: Quais relações existem entre as soluções de um sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ e o espaço linha, o espaço coluna e o espaço nulo da matriz de coeficiente A?

Sejam

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}.$$

Podemos reescrever $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ como

$$A\mathbf{x} = x_1\mathbf{c}_1 + x_2\mathbf{c}_2 + \cdots + x_n\mathbf{c}_n,$$

onde c_i denota o vetor coluna i de A (verifique!).

Assim, um sistema linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ de m equações e n incógnitas pode ser escrito como

$$x_1\mathbf{c}_1 + x_2\mathbf{c}_2 + \cdots + x_n\mathbf{c}_n = \mathbf{b},$$

do que podemos concluir que:

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é consistente $\Leftrightarrow$ $\mathbf{b}$ é uma combinação linear dos vetores colunas de A.

Teorema

Isso nos fornece o seguinte teorema:

Teorema 2.1

Um sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ de equações lineares é consistente se, e só se, $\mathbf{b}$ está no espaço coluna de A.

Teoremas

Teorema 2.2

As operações elementares com linhas não alteram o espaço nulo de uma matriz.

Teorema 2.3

As operações elementares com linhas não alteram o espaço linha de uma matriz.

[1] Howard Anton and Chris Rorres.
***Álgebra Linear com Aplicações*.**
Bookman, Porto Alegre, 10 edition, 2012.
Tradução técnica: Claus Ivo Doering. Editado também como livro impresso em 2012.
Recurso eletrônico.