Aula 08: Eliminação Gaussiana vs Eliminação de Gauss-Jordan.

Karla Lima

Álgebra Linear e Geometria Analítica

FACET/UFGD

Eliminação Gaussiana

Eliminação de Gauss-Jordan

Eliminação Gaussiana

Objetivo

- Dado um sistema linear, o processo de **eliminação gaussiana** consiste em obter um sistema equivalente ao inicial, mas que seja representado por uma "matriz triangular".
- Usamos apenas as operações elementares para obter tal sistema equivalente.
- Por fim, conseguimos encontrar a solução do problema dado.

Método: Eliminação Gaussiana

Para descrever o método, vamos considerar o seguinte sistema linear:

$$
\begin{aligned}
-2x_2 + 3x_3 &= 1 \\
6x_1 + 6x_2 + 3x_3 &= 5 \\
3x_1 + 6x_2 - 3x_3 &= -2
\end{aligned}
$$

Método: Eliminação Gaussiana

Para descrever o método, vamos considerar o seguinte sistema linear:

$$\begin{aligned} -2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 6x_1 + 6x_2 + 3x_3 &= 5 \\ 3x_1 + 6x_2 - 3x_3 &= -2 \end{aligned}$$

Sua matriz aumentada é dada por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 & 1 \\ 6 & 6 & 3 & 5 \\ 3 & 6 & -3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Passo 1: Eliminação Gaussiana

1. Ordene as linhas da matriz aumentada em ordem crescente do número de zeros seguidos nas primeiras entradas.

Passo 1: Eliminação Gaussiana

1. Ordene as linhas da matriz aumentada em ordem crescente do número de zeros seguidos nas primeiras entradas.

No nosso exemplo, só a primeira linha possui zero na primeira posição. Todas as outras linhas possuem coeficientes não nulos.

Portanto, basta trocar as linhas 1 e 3, obtendo o sistema equivalente:

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & -3 & -2 \\ 6 & 6 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Passo 2: Eliminação Gaussiana

2. O primeiro elemento não nulo da linha 1 vira um pivô.

Passo 2: Eliminação Gaussiana

Como a primeira linha da matriz

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & -3 & -2 \\ 6 & 6 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

possui coeficientes não nulos, a mantemos na mesma posição, por hora.

Passo 2: Eliminação Gaussiana

Como a primeira linha da matriz

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & -3 & -2 \\ 6 & 6 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

possui coeficientes não nulos, a mantemos na mesma posição, por hora.

O primeiro coeficiente não nulo é 3, na posição 11. Esse é o nosso pivô.

Passo 3: Eliminação Gaussiana

3. Todos os elementos abaixo do pivô da primeira linha devem ser nulos.

Passo 3: Eliminação Gaussiana

3. Todos os elementos abaixo do pivô da primeira linha devem ser nulos.

O pivô da primeira linha está na posição 11; portanto, os elementos 21 e 31 devem ser zero.

Passo 3: Eliminação Gaussiana

Como o elemento 31 já é zero, basta zerar o elemento da posição 21, através das operações elementares.

Passo 3: Eliminação Gaussiana

Como o elemento 31 já é zero, basta zerar o elemento da posição 21, através das operações elementares.

Obtemos a nova linha 2 ao multiplicar a linha 1 por -2

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & -3 & -2 \\ 6 & 6 & 3 & 5 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

e somá-la à linha 2, obtendo

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & -3 & -2 \\ 0 & -6 & 9 & 9 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Passo 3: Eliminação Gaussiana

- Se necessário, reorganiza as linhas da matriz, de modo a manter a linha com mais zeros seguidos - a partir da primeira entrada - nas linhas inferiores.
- No nosso caso, as duas linhas restantes possuem o mesmo número de zeros na condição dada. Assim, podemos prosseguir.

Passo 4: Eliminação Gaussiana

Vamos introduzir um pivô na segunda linha de

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & -3 & -2 \\ 0 & -6 & 9 & 9 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

4. O primeiro elemento não nulo da linha vira um pivô: nesse caso, o elemento 22.

Passo 4: Eliminação Gaussiana

5. Todos os elementos abaixo do pivô da segunda linha devem ser nulos.

Passo 4: Eliminação Gaussiana

5. Todos os elementos abaixo do pivô da segunda linha devem ser nulos.

O pivô da segunda linha está na posição 22; portanto, o elemento 32 deve ser zero.

Passo 5: Eliminação Gaussiana

Para tanto, obtemos a nova linha 3 ao multiplicarmos a terceira linha por -3

$$\begin{bmatrix} 3 & 6 & -3 & -2 \\ 0 & -6 & 9 & 9 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

e somamos à segunda linha, obtendo o sistema equivalente

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & -6 & 9 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

Passo 5: Eliminação Gaussiana

- Se necessário, reorganiza as linhas da matriz, de modo a manter a linha com mais zeros seguidos - a partir da primeira entrada - nas linhas inferiores.
- No nosso caso, já estamos na última linha. Podemos prosseguir.

Passo 6: Eliminação Gaussiana

Representado na forma de equações por

$$\begin{aligned} 3x_1 + 6x_2 - 3x_3 &= -2 \\ -6x_2 + 9x_3 &= 9 \\ 0 &= 6 \end{aligned}$$

Como a 3ª equação é sempre falsa, o sistema dado não possui solução.

Exercício 1

Usando a eliminação gaussiana, resolva os sistemas abaixo.

a)

$$
\begin{aligned}
5x_1 + x_2 + 2x_3 &= 8 \\
-x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\
3x_1 - 7x_2 + 4x_3 &= 10
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
x - y + 2z - w &= -1 \\
2x + y - 2z - 2w &= -2 \\
-x + 2y - 4z + w &= 1 \\
3x - 3w &= -3
\end{aligned}
$$

Eliminação de Gauss-Jordan

Objetivo [?]

- Dado um sistema linear, o processo de **eliminação de Gauss-Jordan** consiste em obter um sistema equivalente ao inicial, mas que seja representado por uma matriz com mais zeros.
- Usamos apenas as operações elementares para obter tal sistema equivalente.
- Depois de fazer o processo de eliminação gaussiana, zeramos também os elementos acima dos pivôs.
- Por fim, conseguimos encontrar a solução do problema dado.

Método: Eliminação de Gauss-Jordan

Para descrever o método, vamos considerar o sistema linear dado pela matriz aumentada:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}.$$

Método: Eliminação de Gauss-Jordan

Para descrever o método, vamos considerar o sistema linear dado pela matriz aumentada:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}.$$

Após a eliminação gaussiana, obtemos a seguinte matriz aumentada de um sistema equivalente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Zerando os elementos acima dos pivôs

Começamos a zerar os elementos acima do pivô da última linha. Isso introduzirá zeros que permitirão a diminuição de cálculos.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

O pivô da linha 3 tem os elementos $a_{25} = -\frac{7}{2}$ e $a_{15} = 6$ que devem ser zerados.

Zerando os elementos acima dos pivôs

Assim, multiplicando por $\frac{7}{2}$ a terceira linha da matriz anterior, obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{7}{2} & 7 \end{bmatrix}.$$

Somamos as linhas 2 e 3 da matriz acima, para obter a nova linha 2 da matriz equivalente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

Zerando os elementos acima dos pivôs

Agora, multiplicando por -6 a terceira linha da última matriz obtida

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & -12 \end{bmatrix},$$

e somando as linhas 1 e 3 da matriz acima, para obter a nova linha 2 da matriz equivalente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Zerando os elementos acima dos pivôs

Agora, vamos zerar o elemento a_{13}, que está acima do pivô da segunda linha. Para isso, multiplicamos por 5 a segunda linha da última matriz obtida

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

e somando as linhas 1 e 3 da matriz acima, para obter a nova linha 2 da matriz equivalente:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Forma Escalonada

A última matriz obtida depois do processo de eliminação de Gauss-Jordan está na forma escalonada reduzida por linhas.

Eliminação Gaussiana × Eliminação de Gauss-Jordan

- Os computadores em geral aproximam os números e, com isso, introduzem erros de arredondamento; esses erros podem se propagar em contas sucessivas e podem acabar corrompendo uma resposta a ponto de torná-la inútil, a menos que sejam tomadas precauções.
- Os algoritmos (procedimentos) em que isso pode ocorrer são ditos instáveis. Existem várias técnicas para minimizar os erros de arredondamento e a instabilidade.
- Por exemplo, pode ser mostrado que, para sistemas lineares grandes, a eliminação de Gauss-Jordan envolve aproximadamente 50% a mais de operações do que a eliminação gaussiana; por isso, a maioria dos algoritmos de computador tem por base a eliminação gaussiana.