Álgebra Linear - Aula 07

Mudança de Base

Profª Dra. Karla Lima

Sumário

Mudança de Base

Pense nas bases B e B' como dois sistemas de GPS diferentes:

- B: mede em metros
- B': mede em milhas

Uma matriz de transição converte coordenadas de um sistema para outro.

Exemplo 1

Dadas as bases abaixo:

Base B ***(metros)***	***Base*** B' ***(milhas)***
$\mathbf{u} = (1, 0)$	$\mathbf{u}' = (1, 1)$
$\mathbf{v} = (0, 1)$	$\mathbf{v}' = (2, 1)$

reescreva os vetores da base B *em termos da base* B'.

Vetores de B em B'

$$[\mathbf{u}]_B = (1,0) = -1(1,1) + 1(2,1)$$

$$[\mathbf{v}]_B = (0,1) = 2(1,1) - 1(2,1)$$

$$[\mathbf{u}]_B = (1, 0) = -1(1, 1) + 1(2, 1)$$

$$[\mathbf{v}]_B = (0, 1) = 2(1, 1) - 1(2, 1)$$

Vetores coordenadas em B'

$$[\mathbf{u}]_{B'} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{v}]_{B'} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Cada coluna da matriz de transição mostra como um vetor da base B é escrito em coordenadas da base B'.

Matriz de Transição

$$P_{B \to B'} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Usamos a matriz de Transição de $B \to B'$ para reescrever um vetor de coordenadas na base B em termos da base B':

$$[\mathbf{v}]_{B'} = P_{B \to B'} \, [\mathbf{v}]_B$$

Exemplo 2

Converter o vetor

$$[\mathbf{v}]_B = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

para a base B'.

Exemplo: Conversão

Exemplo 2

Converter o vetor

$$[\mathbf{v}]_B = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

para a base B'.

Demonstração.

$$\begin{aligned} [\mathbf{v}]_{B'} &= P_{B\to B'}\,[\mathbf{v}]_B \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -8 \\ 6 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$\square$

Exemplo 3

Dadas as bases abaixo:

Base** B **(metros)	***Base** B' **(milhas)***
$\mathbf{u} = (1, 0)$ $\mathbf{v} = (0, 1)$	$\mathbf{u}' = (1, 1)$ $\mathbf{v}' = (2, 1)$

reescreva os vetores da base B' em termos da base B.

Base B' em B

$$[\mathbf{u}']_{B'} = [(1,0)]_{B'} = (1,1) = 1(1,0) + 1(0,1)$$

$$[\mathbf{v}']_{B'} = [(0,1)]_{B'} = (2,1) = 2(1,0) + 1(0,1)$$

$$[\mathbf{u}']_{B'} = [(1,0)]_{B'} = (1,1) = 1(1,0) + 1(0,1)$$

$$[\mathbf{v}']_{B'} = [(0,1)]_{B'} = (2,1) = 2(1,0) + 1(0,1)$$

Vetores coordenadas em B

$$[\mathbf{u}']_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{v}']_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Cada coluna da matriz de transição mostra como um vetor da base B' é escrito em coordenadas da base B.

Matriz de Transição

$$P_{B' \to B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Usamos a matriz de Transição de $B' \to B$ para reescrever um vetor de coordenadas na base B' em termos da base B:

$$[\mathbf{v}']_B = P_{B' \to B} \, [\mathbf{v}]_{B'}$$

Exemplo: Coordenadas B' em B

Exemplo 4

Converter o vetor

$$[\mathbf{v}]_{B'} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

para a base B.

Exemplo 4

Converter o vetor

$$[\mathbf{v}]_{B'} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

para a base B.

Demonstração.

$$\begin{aligned} [\mathbf{v}]_B &= P_{B' \to B} \, [\mathbf{v}]_{B'} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

Teorema 1

Se $P_{B' \to B}$ for a matriz de transição de uma base B' para uma base B de um espaço vetorial V de dimensão finita, então $P_{B' \to B}$ é invertível e $P^{-1}_{B' \to B}$ é a matriz de transição de B para B', $P_{B \to B'}$.

Demonstração

Por definição, para todo $\mathbf{v} \in V$:

$$[\mathbf{v}]_B = P_{B' \to B} \, [\mathbf{v}]_{B'}.$$

Seja $Q := P_{B \to B'}$. Então:

$$[\mathbf{v}]_{B'} = Q \, [\mathbf{v}]_B.$$

Demonstração

Assim,

$$Q \cdot P_{B' \to B} \cdot [\mathbf{v}]_{B'} = Q\,[\mathbf{v}]_B = [\mathbf{v}]_{B'} \quad \Rightarrow \quad QP_{B' \to B} = I,$$

$$P_{B' \to B} \cdot Q \cdot [\mathbf{v}]_B = P_{B' \to B} \cdot [\mathbf{v}]_{B'} = [\mathbf{v}]_B \quad \Rightarrow \quad P_{B' \to B}Q = I.$$

Demonstração

Assim,

$$Q \cdot P_{B' \to B} \cdot [\mathbf{v}]_{B'} = Q\,[\mathbf{v}]_B = [\mathbf{v}]_{B'} \quad \Rightarrow \quad QP_{B' \to B} = I,$$

$$P_{B' \to B} \cdot Q \cdot [\mathbf{v}]_B = P_{B' \to B} \cdot [\mathbf{v}]_{B'} = [\mathbf{v}]_B \quad \Rightarrow \quad P_{B' \to B}Q = I.$$

Portanto, $P_{B' \to B}$ é invertível e sua inversa é Q:

$$P_{B \to B'} = P_{B' \to B}^{-1}.$$

Exercícios

Exercício 1

Considere a base $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ *de* $\mathbb{R}^2$*, onde*

$$\mathbf{u}_1 = (2, -4), \quad \mathbf{u}_2 = (3, 8).$$

Seja $\mathbf{B} = \{(1,0),(0,1)\}$ *a base canônica de* $\mathbb{R}^2$*.*

a) *Encontre a matriz de transição* $P_{S \to B}$*, que leva vetores escritos na base* S *para a base canônica* B*.*

b) *Encontre a matriz de transição* $P_{B \to S}$*, que leva vetores da base canônica* B *para a base* S*.*

c) *Usando* $P_{B \to S}$*, calcule o vetor de coordenadas* $[\mathbf{w}]_S$*, sabendo que* $\mathbf{w} = (1,1)$ *está dado na base canônica* B*.*

Exercício 2

Considere as bases $B = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ *e* $B' = \{\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}'_2\}$ *de* $\mathbb{R}^2$*, em que*

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}'_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}'_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

a) *Encontre a matriz de transição de* B' *para* B.

b) *Encontre a matriz de transição de* B *para* B'.

c) *Calcule o vetor de coordenadas* $[\mathbf{w}]_{B'}$*, em que*

$$[\mathbf{w}]_B = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

Exercício 3

Considere as bases $B = \{p_1, p_2\}$ *e* $B' = \{q_1, q_2\}$ *de* P_1*, em que*

$$p_1 = 6 + 3x, \quad p_2 = 10 + 2x, \quad q_1 = 2, \quad q_2 = 3 + 2x.$$

1. *Encontre a matriz de transição de* B' *para* B*.*

Resumo

- Ao mudar de base, é necessário expressar os vetores de uma base em termos da outra.
- Cada coluna da matriz de transição corresponde às coordenadas de um vetor da base B, escrito em relação à base B'.
- Assim, a matriz de transição $P_{B \to B'}$ é aquela que transforma vetores escritos na base B em vetores escritos na base B'.

Referências I

[1] Howard Anton and Chris Rorres.
***Álgebra Linear com Aplicações*.**
Bookman, Porto Alegre, 10 edition, 2012.
Tradução técnica: Claus Ivo Doering. Editado também como livro impresso em 2012.
Recurso eletrônico.