

# Aula 07: Escalonamento

---

Karla Lima

Álgebra Linear e Geometria Analítica

FACET/UFGD

## Operações Elementares em Sistemas Lineares

### Escalonamento

# Operações Elementares em Sistemas Lineares

---

Queremos transformar um sistema em outro **equivalente**, mas mais simples.

Queremos transformar um sistema em outro **equivalente**, mas mais simples.

- Sistemas equivalentes têm as **mesmas soluções**
- Usamos operações simples para facilitar a resolução

Queremos transformar um sistema em outro **equivalente**, mas mais simples.

- Sistemas equivalentes têm as **mesmas soluções**
- Usamos operações simples para facilitar a resolução

**Ideia:**

Simplificar o sistema até que seja fácil encontrar as soluções.

# 1 - Trocar a ordem das equações

Considere um sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \\ \vdots \\ a_ix + b_iy = c_i \\ \vdots \\ a_jx + b_jy = c_j \end{array} \right.$$

Podemos trocar a ordem das equações sem alterar a solução.

# 1 - Trocar a ordem das equações

## Por que isso funciona?

A ordem das equações não importa.

Resolver um sistema é encontrar valores que satisfaçam **todas** as equações — não importa a posição delas.

# 1 - Trocar a ordem das equações

Os dois sistemas abaixo possuem a mesma solução:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases}$$

## 2 - Multiplicar uma equação por um número não nulo

$$x + y = 3 \quad \longrightarrow \quad 2x + 2y = 6$$

Multiplicar uma equação por um número não nulo não muda suas soluções.

A equação continua representando a mesma relação.

### 3 - Combinar equações

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

Somando as equações:

$$(x + y) + (2x - y) = 3 + 1 \Rightarrow 3x = 4$$

### 3 - Combinar equações

Obtemos um novo sistema, mais fácil de resolver:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 3x = 4 \end{cases}$$

### 3 - Combinar equações

Obtemos um novo sistema, mais fácil de resolver:

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 3x = 4 \end{cases}$$

Se uma solução satisfaz duas equações, então também satisfaz a soma delas.

Isso permite **eliminar variáveis**.

## Por que essas operações são úteis?

Elas permitem:

- Simplificar o sistema
- Zerar coeficientes
- Isolar variáveis aos poucos

## Por que essas operações são úteis?

Elas permitem:

- Simplificar o sistema
- Zerar coeficientes
- Isolar variáveis aos poucos

### **Objetivo:**

Transformar o sistema em uma forma mais simples (escalonada), facilitando a resolução.

# Escalonamento

---

Nesta seção, estudaremos um procedimento sistemático para resolver sistemas de equações lineares.

Nesta seção, estudaremos um procedimento sistemático para resolver sistemas de equações lineares.

A ideia é aplicar operações simples nas equações para transformar o sistema em uma forma mais fácil de resolver.

Nesta seção, estudaremos um procedimento sistemático para resolver sistemas de equações lineares.

A ideia é aplicar operações simples nas equações para transformar o sistema em uma forma mais fácil de resolver.

**Intuição:**

Vamos reorganizar o sistema passo a passo até que seja possível "ler" a solução diretamente.

- Sistemas pequenos podem ser resolvidos manualmente
- Sistemas grandes exigem métodos sistemáticos

- Sistemas pequenos podem ser resolvidos manualmente
- Sistemas grandes exigem métodos sistemáticos

O método de escalonamento é a base para resolver sistemas de forma eficiente.

## Exemplo: Aplicando o método em Sistemas Lineares

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + y - z = 3 \\ x - y + 2z = 5 \end{cases}$$

**Passo 1: eliminar  $x$  das equações de baixo**

## Exemplo: Aplicando o método em Sistemas Lineares

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + y - z = 3 \\ x - y + 2z = 5 \end{cases}$$

**Passo 1: eliminar  $x$  das equações de baixo**

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

Obtemos o sistema equivalente:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ -y - 3z = -9 \\ -2y + z = -1 \end{cases}$$

## Exemplo: Aplicando o método em Sistemas Lineares

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ -y - 3z = -9 \\ -2y + z = -1 \end{cases}$$

**Passo 2: eliminar  $y$  da última equação**

## Exemplo: Aplicando o método em Sistemas Lineares

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ -y - 3z = -9 \\ -2y + z = -1 \end{cases}$$

**Passo 2: eliminar  $y$  da última equação**

$$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$$

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ -y - 3z = -9 \\ 7z = 17 \end{cases}$$

## Resolvendo o sistema

Da última equação:

$$z = \frac{17}{7}$$

## Resolvendo o sistema

Da última equação:

$$z = \frac{17}{7}$$

Substituindo na segunda:

$$-y - 3\left(\frac{17}{7}\right) = -9 \Rightarrow y = \frac{12}{7}$$

## Resolvendo o sistema

Da última equação:

$$z = \frac{17}{7}$$

Substituindo na segunda:

$$-y - 3\left(\frac{17}{7}\right) = -9 \Rightarrow y = \frac{12}{7}$$

Substituindo na primeira:

$$x + \frac{12}{7} + \frac{17}{7} = 6 \Rightarrow x = \frac{13}{7}$$

## Resolvendo o sistema

Da última equação:

$$z = \frac{17}{7}$$

Substituindo na segunda:

$$-y - 3\left(\frac{17}{7}\right) = -9 \Rightarrow y = \frac{12}{7}$$

Substituindo na primeira:

$$x + \frac{12}{7} + \frac{17}{7} = 6 \Rightarrow x = \frac{13}{7}$$

$$(x, y, z) = \left(\frac{13}{7}, \frac{12}{7}, \frac{17}{7}\right)$$

## Exemplo: Sistema Linear

Usamos um algoritmo para realizar o escalonamento através de matrizes.

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x + y + z = 4 \\ x - y + 2z = 5 \end{cases}$$

## Exemplo: Sistema Linear

Usamos um algoritmo para realizar o escalonamento através de matrizes.

$$\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x + y + z = 4 \\ x - y + 2z = 5 \end{cases}$$

**Matriz aumentada associada:**

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \end{array} \right]$$

## Exemplo: Matriz Aumentada

- Cada **linha** representa uma equação
- Cada **coluna** representa uma variável
- A última coluna é formada pelos **termos independentes**

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \end{array} \right]$$

Objetivo: transformar a matriz em forma escalonada.

## Passo 1: escolher a coluna pivô

Escolhemos a primeira coluna não nula (mais à esquerda):

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \end{array} \right]$$

## Passo 1: escolher a coluna pivô

Escolhemos a primeira coluna não nula (mais à esquerda):

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \end{array} \right]$$

Esse elemento será o pivô.

## Passo 2: ajustar o pivô

Se necessário, trocamos linhas para garantir pivô  $\neq 0$ .

Neste caso, não é necessário trocar.

## Passo 3: tornar o pivô igual a 1

O pivô já é 1, então não precisamos modificar.

## Passo 4: zerar abaixo do pivô

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & 2 \end{array} \right]$$

## Passo 5: repetir na submatriz

Agora ignoramos a primeira linha e repetimos o processo:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & 2 \end{array} \right]$$

Novo pivô na segunda linha.

## Eliminando abaixo do novo pivô

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \quad L_2 \leftarrow L_2 / (-3)$$

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right]$$

## Forma escalonada

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array} \right]$$

Agora a matriz está em forma escalonada.

A última linha representa:

$$0x + 0y + 0z = 4 \Rightarrow 0 = 4.$$

A última linha representa:

$$0x + 0y + 0z = 4 \Rightarrow 0 = 4.$$

Isso é uma contradição.

O sistema não possui solução.

## Exercício de Fixação

Vamos escalonar a matriz aumentada do sistema:

$$\begin{cases} -2x_3 + 7x_5 = 12 \\ 2x_1 + 4x_2 - 10x_3 + 6x_4 + 12x_5 = 28 \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 6x_4 - 5x_5 = -1 \end{cases}$$

## Exercício de Fixação

Vamos escalonar a matriz aumentada do sistema:

$$\begin{cases} -2x_3 + 7x_5 = 12 \\ 2x_1 + 4x_2 - 10x_3 + 6x_4 + 12x_5 = 28 \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 6x_4 - 5x_5 = -1 \end{cases}$$

**Matriz aumentada associada:**

$$\left[ \begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{array} \right]$$