Aula 06: Técnicas de Demonstração - Parte 2

Karla Lima

15 de junho de 2026

FACET/UFGD

Bibliografia

- BISPO, Carlos Alberto F.; CASTANHEIRA, Luiz B.; FILHO, Oswaldo Melo S. Introdução à Lógica Matemática. (Clique aqui!)
- Cordeiro, D. Um Convite à Matemática (Clique aqui!)

Uma nova situação

"Se, e somente se"

O que essa expressão significa?

Discussão

Considere:

$$x < y$$

se, e somente se,

$$x^2 < y^2.$$

(com $x, y > 0$)

O que precisamos demonstrar?

Bicondicional

A afirmação

$$P \leftrightarrow Q$$

significa duas afirmações ao mesmo tempo:

$$P \rightarrow Q$$

e

$$Q \rightarrow P.$$

Estratégia

Para provar

$$P \leftrightarrow Q$$

precisamos demonstrar:

1. $P \rightarrow Q$;
2. $Q \rightarrow P$.

São duas demonstrações independentes.

Atividade em grupos

Grupo A:

$$x < y \implies x^2 < y^2$$

Grupo B:

$$x^2 < y^2 \implies x < y$$

(com $x, y > 0$)

Retomando

Nas últimas aulas aprendemos:

- prova direta;
- contrapositiva;
- E agora vimos a bicondicional.

Todas essas técnicas tentam mostrar que uma afirmação é verdadeira.

Pergunta
E quando queremos mostrar que uma afirmação é falsa?

Uma afirmação suspeita

Considere a afirmação:

Para quaisquer números reais a e b,

se $a^2 = b^2$,

então $a = b$.

Vocês acreditam que ela é verdadeira?

Atividade em grupos

Tentem encontrar valores para:

$$a \quad \text{e} \quad b$$

tais que:

$$a^2 = b^2$$

mas

$$a \neq b.$$

O que encontramos?

$$a = -1$$

$$b = 1$$

Então:

$$(-1)^2 = 1^2$$

mas

$$-1 \neq 1.$$

Contraexemplos

Ideia intuitiva

Uma **afirmação universal** pode ser derrubada com um único exemplo que não a satisfaz.

Esse exemplo recebe o nome de:

Contraexemplo

Desafio

Definição
Um número inteiro n ($n > 1$) é dito um número primo, se possuir exatamente dois divisores positivos, a saber, 1 e n.

Desafio

Definição
Um número inteiro n ($n > 1$) é dito um número primo, se possuir exatamente dois divisores positivos, a saber, 1 *e n.*

A afirmação abaixo é verdadeira?

Todo número primo é ímpar.

Se for falsa, encontre um contraexemplo.

A Prova por Contradição

Quando uma afirmação é falsa?

Uma proposição do tipo

$$P \to Q$$

só é falsa quando:

- P é verdadeira;
- Q é falsa.

Mudando de perspectiva

Até agora vimos como provar afirmações.

Mas existe outra estratégia:

Assumir que a conclusão é falsa.

e observar o que acontece.

Contradição

Recordemos:

Uma contradição ocorre quando uma afirmação e sua negação aparecem simultaneamente.

Exemplo:

$$P \quad \text{e} \quad \neg P.$$

Prova por Contradição

Definição

Para mostrar a validade de um argumento por ***prova ou demonstração por contradição****, admitimos que a conclusão (q) é falsa e a premissa (p) verdadeira (assim, $p \to q$ é falsa).*

- *A partir de $\neg q$ verdadeira, usando uma argumentação válida, chegamos que p é falsa.*
- *Assim, teremos p verdadeira e p também falsa, uma contradição.*

Logo, essa suposição, de que q é falsa, leva logicamente a uma contradição.

Um exemplo simples

Prove:

$$\text{Se } x > 0 \text{, então } x + 1 > 0.$$

Vamos tentar uma prova por contradição.

Supondo o contrário

Assuma:

$$p : x > 0$$

e

$$\neg q : x + 1 \leq 0.$$

Da segunda desigualdade:

$$x \leq -1 < 0.$$

A contradição

Obtivemos:

$$x > 0 \quad \text{e} \quad x < 0.$$

Isso é impossível.

Logo:

$$x + 1 > 0.$$

Atividade em grupos

Classifiquem as estratégias mais adequadas para os problemas a seguir:

1. prova direta;
2. contrapositiva;
3. bicondicional;
4. contraexemplo;
5. contradição.

Atividade em grupos

1. Um inteiro é par se, e somente se, seu quadrado é par.
2. Se ab é ímpar, então a e b são ímpares.
3. Todo número natural é maior que seu quadrado.
4. Se $n = ab$, com a e b inteiros positivos, então $a \leq \sqrt{n}$ ou $b \leq \sqrt{n}$.
5. Se um inteiro é divisível por 6, então é divisível por 2 e por 3.

O que aprendemos?

1. Uma afirmação universal pode ser refutada por um contraexemplo;
2. Contradições indicam que uma hipótese não pode ser verdadeira;
3. A prova por contradição é uma poderosa técnica de demonstração;
4. Escolher a estratégia adequada faz parte do trabalho matemático.