Aula 06: Matrizes Especiais

Karla Lima

Álgebra Linear e Geometria Analítica

FACET/UFGD

Matrizes Especiais

Sistemas com Matrizes Especiais

Matrizes Especiais

Matriz Diagonal

Uma matriz é denominada **matriz diagonal** se todas as suas entradas fora da diagonal principal são zero.

Matriz Diagonal

Uma matriz é denominada **matriz diagonal** se todas as suas entradas fora da diagonal principal são zero.

Exemplo 1

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Exemplo Motivador

Considere

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Vamos procurar X tal que $DX = I$.

Exemplo Motivador

Se

$$X = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

então

$$DX = \begin{bmatrix} 2a & 0 \\ 0 & 5b \end{bmatrix}.$$

Exemplo Motivador

Para obter a identidade precisamos

$$2a = 1, \qquad 5b = 1.$$

Logo

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

Exemplo Motivador

Para obter a identidade precisamos

$$2a = 1, \qquad 5b = 1.$$

Logo

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

Comparação

- As entradas fora da diagonal continuam sendo zero.
- Cada elemento da diagonal foi substituído pelo seu inverso.

Exemplo Motivador

Para obter a identidade precisamos

$$2a = 1, \qquad 5b = 1.$$

Logo

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

Comparação

- As entradas fora da diagonal continuam sendo zero.
- Cada elemento da diagonal foi substituído pelo seu inverso.

O que acontece em geral com matrizes diagonais?

Teorema 1
Uma matriz diagonal

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix}$$

é invertível se, e somente se, todas as entradas da diagonal são não nulas. Nesse caso,

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} 1/d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/d_n \end{bmatrix}$$

Exemplo 2

Seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Verifique se A possui inversa. Em caso positivo, exiba A^{-1}.

Matriz Triangular

Matriz triangular inferior: entradas acima da diagonal principal são nulas.

Matriz Triangular

Matriz triangular inferior: entradas acima da diagonal principal são nulas.

Matriz triangular superior: entradas abaixo da diagonal principal são nulas.

Matriz Triangular

Matriz triangular inferior: entradas acima da diagonal principal são nulas.

Matriz triangular superior: entradas abaixo da diagonal principal são nulas.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}$$

Uma matriz triangular superior 4×4 arbitrária.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Uma matriz triangular inferior 4×4 arbitrária.

Observação

Toda matriz diagonal é um caso particular de matriz triangular.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

é triangular superior e inferior.

Exemplo Motivador

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- A matriz A possui inversa.
- A matriz B não possui inversa.

Exemplo Motivador

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- A matriz A possui inversa.
- A matriz B não possui inversa.

Qual é a diferença entre elas?

Exemplo Motivador

Considere

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Calculando a inversa através da definição $A \cdot A^{-1} = I$, obtemos:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Exemplo Motivador

Considere

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Calculando a inversa através da definição $A \cdot A^{-1} = I$, obtemos:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

- A inversa também é triangular superior.
- Os elementos da diagonal continuam não nulos.

Matriz Triangular: Inversa

Teorema 2
Uma matriz triangular é invertível se, e somente se, suas entradas diagonais são todas diferentes de zero.

Matriz Triangular: Inversa

Exemplo 3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A matriz A é invertível, mas a matriz B não.

Observação

Para matrizes triangulares, a invertibilidade depende apenas dos elementos da diagonal.

Isso também ocorre com matrizes diagonais.

Matriz Transposta

Se $A = (a_{ij})$ é $m \times n$, sua transposta é

$$(A^T)_{ij} = a_{ji}.$$

Matriz Transposta

Se $A = (a_{ij})$ é $m \times n$, sua transposta é

$$(A^T)_{ij} = a_{ji}.$$

Exemplo 4

Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ *então* $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$.

Matriz Simétrica

Uma matriz quadrada A é **simétrica** se $A = A^T$.

Ou seja $a_{ij} = a_{ji}$.

Uma matriz quadrada A é **simétrica** se $A = A^T$.

Ou seja $a_{ij} = a_{ji}$.

Exemplo 5
São simétricas as matrizes:

$$\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Sistemas com Matrizes Especiais

Sistemas Lineares e Invertibilidade

Considere

$$A\mathsf{x} = \mathsf{b}.$$

Sistemas Lineares e Invertibilidade

Considere

$$Ax = b.$$

Vimos que se A é invertível, então

$$x = A^{-1}b$$

é a única solução do sistema.

Sistema com Matriz Diagonal

As matrizes diagonais estão associadas a sistemas mais simples, de fácil resolução.

A equação matricial

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 10 \end{bmatrix}$$

é associada ao sistema

$$\begin{cases} 2x = 6 \\ 5y = 10. \end{cases}$$

Sua solução é:

$$x = 3, \qquad y = 2$$

Sistema com Matriz Triangular

Matrizes triangulares também geram sistemas simples.

A equação matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 10 \end{bmatrix}$$

está associada ao sistema

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 3y + 4z = 7 \\ 5z = 10. \end{cases}$$

Sistema com Matriz Triangular

A solução também é obtida facilmente:

$$5z = 10 \Rightarrow z = 2$$

$$3y + 4z = 7 \Rightarrow y = -\frac{1}{3}$$

$$x + 2y - z = 2 \Rightarrow x = \frac{14}{3}$$

Por que estudar essas matrizes?

- matriz diagonal $\rightarrow$ equações independentes
- matriz triangular $\rightarrow$ substituição direta

Essas estruturas tornam a resolução de sistemas muito mais simples.