Álgebra Linear - Aula 05

Base e Dimensão

Profª Dra. Karla Lima

Sumário

Base de um Espaço Vetorial

É como um conjunto mínimo de peças de Lego: com elas, podemos construir qualquer elemento do espaço apenas combinando-as de diferentes formas.

Definição

Se V for um espaço vetorial qualquer e $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ for um conjunto finito de vetores em V, dizemos que S é uma ***base*** *de V e valerem as duas condições a seguir.*

a) *S é linearmente independente.*

b) *S gera V.*

Exemplo 1

Exemplo

Quais das afirmações abaixo são verdadeiras?

a) *O conjunto dos vetores canônicos* $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ *é uma base para o espaço* $\mathbb{R}^3$.

b) *O conjunto dos vetores* $\{(2,1,0),(-1,0,0),(2,0,0)\}$ *é uma base para o espaço* $\mathbb{R}^3$.

c) *O conjunto de vetores* $\{(2,1),(-1,0),(0,0)\}$ *é uma base para o espaço* $\mathbb{R}^2$.

d) *O conjunto de vetores* $\{(2,1),(-1,0)\}$ *é uma base para o espaço* $\mathbb{R}^2$.

e) *O conjunto dos vetores* $\{1, x, x^2, x^3\}$ *é uma base para o espaço* P_3*, dos polinômios de grau menor ou igual a 3.*

Vetor de Coordenada [1]

Definição

Se $S = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ *for uma base ordenada de um espaço vetorial* V *e se*

$$\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n$$

é a expressão de um vetor $\boldsymbol{v}$ *em termos da base S, então os escalares* $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *são denominados* ***coordenadas*** *de* $\boldsymbol{v}$ *em relação à base S.*
O vetor $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ *em* $\mathbb{R}^n$ *é denominado* ***vetor de coordenadas de*** v ***em relação a*** S *e é denotado por*

$$(v)_S = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

Exemplo 2

Exemplo

Na aula anterior, vimos que os conjuntos $S = \{(1,0),(0,1)\}$ *e* $W = \{(2,1),(-1,0)\}$ *são bases para o espaço* $\mathbb{R}^2$*. Escreva o vetor de coordenadas do vetor* $v = -3(1,0) + 4(0,1)$ *nas bases* S *e* W*.*

Exemplo 3

Exemplo

A base canônica do espaço $\mathbb{M}_{2\times 2}$ *é o conjunto*

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Dada a matriz $B = \begin{bmatrix} e & -1 \\ 0 & \pi \end{bmatrix}$, *encontre o seu vetor de coordenadas* $(B)_S$.

Dimensão de um Espaço Vetorial

Podemos pensar em dimensão como o número mínimo de "direções"que você precisa para alcançar qualquer ponto dentro de um espaço.

Definição

*A **dimensão** de um espaço vetorial de dimensão finita V é denotada por $\dim(V)$ e é definida como o número de vetores numa base de V. Além disso, definimos o espaço vetorial nulo como tendo dimensão zero.*

Teorema 1

Teorema (1)

Seja S um conjunto não vazio de vetores num espaço vetorial V.

a) *Se S for um conjunto linearmente independente e se v for um vetor em V que está fora do $\operatorname{ger}(S)$, então o conjunto $S \cup \{v\}$ que resulta do acréscimo de v a S ainda é linearmente independente.*

b) *Se v for um vetor em S que pode ser expresso como combinação linear dos outros vetores de S, e se $S - \{v\}$ denotar o conjunto obtido removendo v de S, então S e $S - \{v\}$ geram o mesmo espaço, ou seja,*

$$\operatorname{ger}(S) = \operatorname{ger}(S - \{v\})$$

Teorema (2)

Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ uma base qualquer de V.

a) *Um conjunto com mais de n vetores é linearmente dependente.*

b) *Um conjunto com menos de n vetores não gera V.*

O teorema abaixo segue diretamente do Teorema (2).

Teorema (3)

Todas as bases de um espaço vetorial de dimensão finita têm o mesmo número de vetores.

Exemplo

Dimensão de alguns espaços vetoriais familiares:

$$dim(R^n) = n \quad A\ base\ canônica\ tem\ n\ vetores$$

$$dim(P_n) = n + 1 \quad A\ base\ canônica\ tem\ n + 1\ vetores$$

$$dim(M_{mn}) = mn \quad A\ base\ canônica\ tem\ mn\ vetores$$

Teorema (3)

Se W for um subespaço de um espaço vetorial V de dimensão finita, então

a) *W tem dimensão finita.*
b) $dim(W) \leq dim(V)$.
c) $W = V$ *se, e somente se,* $dim(W) = dim(V)$

[1] Howard Anton and Chris Rorres.
***Álgebra Linear com Aplicações*.**
Bookman, Porto Alegre, 10 edition, 2012.
Tradução técnica: Claus Ivo Doering. Editado também como livro impresso em 2012.
Recurso eletrônico.