Aula 05: Como Convencer em Matemática?

Karla Lima

9 de junho de 2026

FACET/UFGD

Bibliografia

- BISPO, Carlos Alberto F.; CASTANHEIRA, Luiz B.; FILHO, Oswaldo Melo S. Introdução à Lógica Matemática. (Clique aqui!)
- Cordeiro, D. Um Convite à Matemática (Clique aqui!)

Retomando o que vimos

Até agora estudamos:

- argumentos;
- validade;
- verdade;
- linguagem lógica;
- condicionais.

Pergunta

Como podemos convencer alguém de que uma afirmação matemática é sempre verdadeira?

Um desafio

A soma de dois números ímpares é sempre par.

Como você convenceria alguém disso?

O que normalmente fazemos?

Alguns exemplos:

$$3 + 5 = 8$$

$$7 + 9 = 16$$

$$11 + 13 = 24$$

Pergunta

Esses exemplos provam a afirmação?

Problema

Mesmo depois de muitos exemplos ainda resta uma dúvida:

$$1001 + 1003 = 2004$$

$$1000001 + 1000003 = 2000004$$

E os números que ainda não testamos?

Ideia importante

Exemplos ajudam a acreditar.

Demonstrações ajudam a ter certeza.

Um argumento conhecido

Premissa 1

Todo gato é mamífero.

Premissa 2

Miau é um gato.

Conclusão

Miau é mamífero.

Por que a conclusão é inevitável?

Porque as premissas garantem a conclusão.

Foi exatamente isso que chamamos de:

VALIDADE

E na Matemática?

Uma demonstração matemática é construída por uma sequência de argumentos válidos.

Cada passo deve ser justificado.

Não basta dizer que algo parece verdadeiro.

Atividade em grupos

Cada grupo receberá uma afirmação.

Discutam:

1. Alguns exemplos sugerem que ela é verdadeira?
2. Como podemos organizar os casos?
3. O que precisaria ser mostrado para convencer qualquer pessoa?

Afirmações

1. Para todo inteiro n, $n^2 + n$ é par.
2. Todo quadrado de um número inteiro deixa resto 0 ou 1 na divisão por 4.
3. A soma de três números consecutivos quaisquer é divisível por 3.

Como dividir os inteiros?

Pergunta
Existe alguma maneira natural de separar todos os números inteiros em grupos?

Sugestões?

Uma divisão natural

Todo inteiro é:

- par;
- ou ímpar.

Portanto basta analisar dois casos.

Caso 1: n é par

Se n é par, então

$$n = 2k$$

para algum inteiro k.

Substituindo:

$$n^2 + n = (2k)^2 + 2k$$

Continuando

$$n^2 + n = (2k)^2 + 2k$$

$$= 4k^2 + 2k$$

$$= 2(2k^2 + k)$$

Logo $n^2 + n$ é par, uma vez que $2k^2 + k$ é a soma e multiplicação de inteiros, sendo assim também um inteiro.

Caso 2: n é ímpar

Se n é ímpar, então

$$n = 2k + 1$$

para algum inteiro k.

Substituindo:

$$n^2 + n = (2k + 1)^2 + (2k + 1)$$

Continuando

$$(2k+1)^2 + (2k+1)$$

$$= 4k^2 + 4k + 1 + 2k + 1$$

$$= 4k^2 + 6k + 2$$

$$= 2(2k^2 + 3k + 1)$$

Logo também é par, uma vez que $2k^2 + 3k + 1$ é a soma e multiplicação de inteiros, sendo assim também um inteiro.

Conclusão

- Se n é par, então $n^2 + n$ é par;
- Se n é ímpar, então $n^2 + n$ é par.

Como todo inteiro é par ou ímpar:

$$n^2 + n$$

é sempre par.

O que acabamos de fazer?

Provamos uma afirmação para todos os inteiros.

A estratégia utilizada foi:

1. separar em casos;
2. justificar cada passo;
3. concluir.

Como escrever uma demonstração?

Passo 1

Escreva claramente o que será provado.

Passo 2

Declare as hipóteses.

Passo 3

Justifique cada passo.

Passo 4

Conclua explicitamente.

Caça aos erros

Demonstração

$$3 + 5 = 8$$

Logo a soma de dois números ímpares é par.

Pergunta

O que está errado?

Outro erro comum

Demonstração

$$14 \cdot 15 \cdot 16$$

é divisível por 3.

Logo o produto de quaisquer três números consecutivos é divisível por 3.

Pergunta

Por que isso não é uma demonstração?

O que aprendemos?

1. Exemplos não são demonstrações;
2. Demonstrações são cadeias de argumentos válidos;
3. Muitas provas começam separando casos;
4. Paridade é uma ferramenta poderosa;
5. Escrever matemática é explicar raciocínios.

Nem Sempre o Caminho Direto é o Melhor

Um novo desafio

Afirmação

Se x^2 é par, então x é par.

Tentem pensar em uma demonstração.

Discussão em grupos

- O que sabemos?
- O que queremos concluir?
- O caminho direto parece simples?

Uma dificuldade

Queremos provar:

$$x^2 \text{ é par} \implies x \text{ é par}$$

Mas partir de

$$x^2 \text{ é par}$$

não parece ajudar muito.

Talvez estejamos olhando para o lado errado.

Mudando a pergunta

Pergunta

Quando um número inteiro não é par?

Resposta:

Ímpar

Então vamos investigar os números ímpares.

Investigação

Façam alguns testes.

$$1^2 = 1$$

$$3^2 = 9$$

$$5^2 = 25$$

$$7^2 = 49$$

O que vocês observam?

Uma nova conjectura

Parece que:

$$\text{Se } x \text{ é ímpar, então } x^2 \text{ é ímpar.}$$

Essa afirmação é mais fácil de demonstrar?

Contrapositiva

Queremos provar:

$$x^2 \text{ é par} \Longrightarrow x \text{ é par}$$

A contrapositiva é:

$$x \text{ não é par} \Longrightarrow x^2 \text{ não é par}$$

ou seja,

$$x \text{ é ímpar} \Longrightarrow x^2 \text{ é ímpar}$$

Ideia importante

Contrapositiva

Uma proposição

$$P \to Q$$

é equivalente a

$$\neg Q \to \neg P.$$

Portanto, podemos provar uma delas para concluir a outra.

Demonstração

Suponha que x é ímpar.

Então existe um inteiro k tal que

$$x = 2k + 1.$$

Logo,

$$x^2 = (2k + 1)^2.$$

Continuando

$$x^2 = (2k+1)^2$$

$$= 4k^2 + 4k + 1$$

$$= 2(2k^2 + 2k) + 1.$$

Portanto, x^2 é ímpar.

Conclusão

Mostramos que

$$x \text{ ímpar} \Longrightarrow x^2 \text{ ímpar.}$$

Logo,

$$x^2 \text{ par} \Longrightarrow x \text{ par.}$$

Quando usar contrapositiva?

Dica

Quando partir da hipótese parece difícil, vale a pena investigar a contrapositiva.

Muitas demonstrações ficam mais simples dessa forma.

Desafio

Tentem demonstrar:

1. Se $x^2 - 6x + 5$ é par, então x é ímpar.

Qual estratégia vocês escolheriam?

O que aprendemos?

1. Nem toda demonstração é mais fácil pelo caminho direto;
2. A contrapositiva é uma ferramenta poderosa;
3. Bicondicionais exigem duas demonstrações;
4. Escolher uma estratégia faz parte da atividade matemática.