# Álgebra Linear - Aula 05

## Base e Dimensão

Profª Dra. Karla Lima

# Sumário

## Base de um Espaço Vetorial

É como um conjunto mínimo de peças de Lego: com elas, podemos construir qualquer elemento do espaço apenas combinando-as de diferentes formas.

## Definição

*Se V for um espaço vetorial qualquer e* $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ *for um conjunto finito de vetores em V, dizemos que S é uma* ***base*** *de V e valerem as duas condições a seguir.*

a) *S é linearmente independente.*

b) *S gera V.*

# Exemplo 1

## Exemplo

*Quais das afirmações abaixo são verdadeiras?*

a) *O conjunto dos vetores canônicos* $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ *é uma base para o espaço* $\mathbb{R}^3$.

b) *O conjunto dos vetores* $\{(2,1,0),(-1,0,0),(2,0,0)\}$ *é uma base para o espaço* $\mathbb{R}^3$.

c) *O conjunto de vetores* $\{(2,1),(-1,0),(0,0)\}$ *é uma base para o espaço* $\mathbb{R}^2$.

d) *O conjunto de vetores* $\{(2,1),(-1,0)\}$ *é uma base para o espaço* $\mathbb{R}^2$.

e) *O conjunto dos vetores* $\{1,x,x^2,x^3\}$ *é uma base para o espaço* $P_3$*, dos polinômios de grau menor ou igual a 3.*

# Vetor de Coordenada [1]

## Definição

*Se* $S = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots, \boldsymbol{v}_n\}$ *for uma base ordenada de um espaço vetorial* $V$ *e se*

$$\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n$$

*é a expressão de um vetor* $\boldsymbol{v}$ *em termos da base* $S$*, então os escalares* $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *são denominados **coordenadas** de* $\boldsymbol{v}$ *em relação à base* $S$*.*
*O vetor* $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ *em* $\mathbb{R}^n$ *é denominado **vetor de coordenadas de** v **em relação a** S e é denotado por*

$$(v)_S = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

# Exemplo 2

## Exemplo

*Na aula anterior, vimos que os conjuntos* $S = \{(1,0),(0,1)\}$ *e* $W = \{(2,1),(-1,0)\}$ *são bases para o espaço* $\mathbb{R}^2$. *Escreva o vetor de coordenadas do vetor* $v = -3(1,0) + 4(0,1)$ *nas bases* $S$ *e* $W$.

# Exemplo 3

## Exemplo

*A base canônica do espaço* $\mathbb{M}_{2\times 2}$ *é o conjunto*

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

*Dada a matriz* $B = \begin{bmatrix} e & -1 \\ 0 & \pi \end{bmatrix}$, *encontre o seu vetor de coordenadas* $(B)_S$.

**Dimensão de um Espaço Vetorial**

Podemos pensar em dimensão como o número mínimo de "direções"que você precisa para alcançar qualquer ponto dentro de um espaço.

# Definição

## Definição

*A **dimensão** de um espaço vetorial de dimensão finita $V$ é denotada por $\dim(V)$ e é definida como o número de vetores numa base de $V$. Além disso, definimos o espaço vetorial nulo como tendo dimensão zero.*

# Teorema 1

**Teorema**

*Sejam $V$ um espaço vetorial de dimensão finita e $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ uma base qualquer de $V$.*

a) *Um conjunto com mais de $n$ vetores é linearmente dependente.*

b) *Um conjunto com menos de $n$ vetores não gera $V$.*

# Exemplo 3

## Exemplo

*Dimensão de alguns espaços vetoriais familiares:*

$$dim(R^n) = n \quad \text{A base canônica tem } n \text{ vetores}$$
$$dim(P_n) = n + 1 \quad \text{A base canônica tem } n+1 \text{ vetores}$$
$$dim(M_{mn}) = mn \quad \text{A base canônica tem } mn \text{ vetores}$$

## Teorema

*Se $W$ for um subespaço de um espaço vetorial $V$ de dimensão finita, então*

a) *$W$ tem dimensão finita.*
b) $dim(W) \leq dim(V)$.
c) $W = V$ *se, e somente se,* $dim(W) = dim(V)$

**Mudança de Base**

Pense nas bases $B$ e $B'$ como se fossem dois sistemas de GPS diferentes, um usando metros e outro usando milhas. Usaremos uma matriz para converter as coordenadas de um ponto de um sistema de GPS para o outro.

# Exemplo 5

## Exemplo

*Considere as bases* $B = \{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\} = \{(1,0), (0,1)\}$ *e* $B' = \{\boldsymbol{u'}, \boldsymbol{v'}\} = \{(1,1), (2,1)\}$.

a) *Escreva os elementos de* $B$ *como combinação linear dos elementos de* $B'$. *Escreva os vetores coordenadas* $[\boldsymbol{u}]_{B'}$ *e* $[\boldsymbol{v}]_{B'}$.

b) *Escreva os elementos de* $B'$ *como combinação linear dos elementos de* $B$. *Escreva os vetores coordenadas* $[\boldsymbol{u'}]_{B'}$ *e* $[\boldsymbol{v'}]_{B}$.

Dada duas bases $B$ e $B'$ e qualquer vetor $\mathbf{v}$ no espaço vetorial $V$, o vetor de coordenadas $[\mathbf{v}]_B$ está relacionado com o vetor de coordenadas $[\mathbf{v}]_{B'}$ pela equação

$$[\mathbf{v}]_B = P_{B' \to B}[\mathbf{v}]_{B'}$$

onde as colunas de $P_{B' \to B}$ são os vetores coordenadas dos vetores da base $B'$ em relação à base $B$.

Dada duas bases $B$ e $B'$ e qualquer vetor $\mathbf{v}$ no espaço vetorial $V$, o vetor de coordenadas $[\mathbf{v}]_B$ está relacionado com o vetor de coordenadas $[\mathbf{v}]_{B'}$ pela equação

$$[\mathbf{v}]_B = P_{B' \to B}[\mathbf{v}]_{B'}$$

onde as colunas de $P_{B' \to B}$ são os vetores coordenadas dos vetores da base $B'$ em relação à base $B$.

Voltando ao exemplo do GPS com diferentes sistemas de medida, A matriz $P_{B' \to B}$ é como um manual de conversão que, se você souber as coordenadas em milhas, te diz exatamente quais seriam as coordenadas em metros.

# Exemplo 6

## Exemplo

*No item a) do Exemplo 5, vimos que*

$$(1,0) = -1(1,1) + 1(2,1)$$
$$(0,1) = 2(1,1) - 1(2,1)$$

# Exemplo 6

## Exemplo

*No item a) do Exemplo 5, vimos que*

$$\begin{aligned}(1,0) &= -1(1,1) + 1(2,1)\\ (0,1) &= 2(1,1) - 1(2,1)\end{aligned}$$

*Assim, a matriz de transição $P_{B\to B'}$, que leva vetores escritos na base $B$ em vetores escritos na base $B'$, é dada por*

$$P_{B\to B'} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

*onde suas colunas são os vetores coordenadas dos vetores da base $B$ em relação à base $B'$.*

# Exemplo 7: Calculando vetores de coordenadas

## Exemplo

*Sejam $B$ e $B'$ as bases do exemplo 5. Encontre $[\boldsymbol{v}]_{B'}$, sabendo que*

$$[\boldsymbol{v}]_B = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

# Exemplo 8

## Exemplo

*No item b) do Exemplo 5, vimos que*

$$(1,1) = 1(1,0) + 1(0,1)$$
$$(2,1) = 2(1,0) + 1(0,1)$$

# Exemplo 8

## Exemplo

*No item b) do Exemplo 5, vimos que*

$$(1,1) = 1(1,0) + 1(0,1)$$
$$(2,1) = 2(1,0) + 1(0,1)$$

*Assim, a matriz de transição $P_{B' \to B}$, que leva vetores escritos na base $B'$ em vetores escritos na base $B$, é dada por*

$$P_{B' \to B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

*onde suas colunas são os vetores coordenadas dos vetores da base $B'$ em relação à base $B$.*

# Exemplo 9: Calculando vetores de coordenadas

## Exemplo

*Sejam $B$ e $B'$ as bases do exemplo 5. Encontre $[\boldsymbol{v}]_B$, sabendo que*

$$[\boldsymbol{v}]_{B'} = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

# Teorema 3

## Teorema

*Se $P_{B' \to B}$ for a matriz de transição de uma base $B'$ para uma base $B$ de um espaço vetorial $V$ de dimensão finita, então $P_{B' \to B}$ é invertível e $P^{-1}_{B' \to B}$ é a matriz de transição de $B$ para $B'$, $P_{B \to B'}$.*

# Um procedimento para calcular $P_{B\to B'}$, entre bases de $\mathbb{R}^n$

- **Passo 1.** Montamos a matriz $[B' \mid B]$, onde os vetores de $B$ e $B'$ formam as **colunas** desta matriz.
- **Passo 2.** Reduzimos a matriz do Passo 1 à forma escalonada reduzida usando operações elementares com as linhas.
- **Passo 3.** A matriz resultante é $[I \mid P_{B\to B'}]$.
- **Passo 4.** Extraímos a matriz $P_{B\to B'}$ do lado direito da matriz do Passo 3.

$$[\text{base nova} \mid \text{base velha}] \xrightarrow{\text{operações com linhas}} [I \mid \text{transição da velha à nova}]$$

### Exemplo

*Usando o procedimento dado, encontre a matriz de transição $P_{B \to B'}$ e $P_{B' \to B}$, onde*

$$B = \{(1,0),(0,1)\} \ e \ B' = \{(1,1),(2,1)\}.$$

[1] Howard Anton and Chris Rorres.
***Álgebra Linear com Aplicações*.**
Bookman, Porto Alegre, 10 edition, 2012.
Tradução técnica: Claus Ivo Doering. Editado também como livro impresso em 2012.
Recurso eletrônico.