

# Aula 04: Sistemas Lineares e Matrizes

---

Karla Lima

Álgebra Linear e Geometria Analítica

FACET/UFGD

# Matrizes e Sistemas Lineares: Qual a relação?

---

- Tradicionalmente aprendemos Matrizes, Determinantes e Sistemas Lineares nesta ordem - o que é razoável do ponto de vista lógico;
- Mas, historicamente, as coisas não se passaram assim. Apesar de não ser possível precisar o início de cada um, já se falava em Sistemas Lineares e Determinantes muito antes do surgimento do conceito de Matriz.

- Podemos ver que o conceito de matrizes é interessante de ser aplicado em Sistemas Lineares, fazendo-o mais agradável de lidar.
- Isso porque, à medida que cresce o número de equações e de incógnitas, aumenta também a complexidade da álgebra envolvida em sua resolução.
- Padronizar os procedimentos fazem os sistemas ficarem mais “tratáveis”.

# Matrizes e Sistemas Lineares

Dado o sistema linear

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m,$$

podemos reescrevê-lo como um produto de matrizes:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Representamos, resumidamente, pela equação matricial

$$Ax = b.$$

# Matrizes: Definição

---

## Definição 1

Uma **matriz** é definida como um arranjo retangular de números, dispostos em linhas e colunas que ficam entre colchetes [ ] ou parênteses ( ).

- Os membros do arranjo são denominados elementos da matriz e são representados por  $a_{ij}$ , onde  $i$  determina em qual linha da matriz o elemento se encontra e  $j$  determina em qual coluna.

- Os membros do arranjo são denominados elementos da matriz e são representados por  $a_{ij}$ , onde  $i$  determina em qual linha da matriz o elemento se encontra e  $j$  determina em qual coluna.
- Uma matriz é dita ter ordem  $m \times n$  se possui  $m$  linhas e  $n$  colunas. Podemos descrever tais matrizes das seguintes formas:  $A_{m \times n}$  ou  $[a_{ij}]_{m \times n}$ .

- Os membros do arranjo são denominados elementos da matriz e são representados por  $a_{ij}$ , onde  $i$  determina em qual linha da matriz o elemento se encontra e  $j$  determina em qual coluna.
- Uma matriz é dita ter ordem  $m \times n$  se possui  $m$  linhas e  $n$  colunas. Podemos descrever tais matrizes das seguintes formas:  $A_{m \times n}$  ou  $[a_{ij}]_{m \times n}$ .
- Denotamos por  $\underline{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$  o conjunto de todas as matrizes de ordem  $m \times n$ , cujas entradas  $a_{ij}$  são números reais.

## Exemplo 1

### Exemplo 1

*Abaixo, temos uma matriz  $A_{2 \times 3}$ , com 2 linhas e 3 colunas:*

$$A_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

## Exemplo 2

### Exemplo 2

*No Mato Grosso, o governo criou um sistema de classificação de risco para ajudar a prevenir e combater o coronavírus, dada pela tabela abaixo:*

MUNICÍPIOS COM MAIS DE 40 CASOS ATIVOS				
	Taxa de Crescimento de Contaminação TCC			
Taxa Ocupação UTIS	Menor de 25%	25% a 50%	50 a 100%	Maior de 100%
Menor que 60%	BAIXO	BAIXO	MODERADO	ALTO
60% a 80%	BAIXO	MODERADO	ALTO	MUITO ALTO
Maior que 80%	MODERADO	ALTO	MUITO ALTO	MUITO ALTO

## Exemplo 2

### Exemplo 2

*No Mato Grosso, o governo criou um sistema de classificação de risco para ajudar a prevenir e combater o coronavírus, dada pela tabela abaixo:*

MUNICÍPIOS COM MAIS DE 40 CASOS ATIVOS				
	Taxa de Crescimento de Contaminação TCC			
Taxa Ocupação UTIS	Menor de 25%	25% a 50%	50 a 100%	Maior de 100%
Menor que 60%	BAIXO	BAIXO	MODERADO	ALTO
60% a 80%	BAIXO	MODERADO	ALTO	MUITO ALTO
Maior que 80%	MODERADO	ALTO	MUITO ALTO	MUITO ALTO

*Este é um exemplo de matriz.*

Duas matrizes  $A = [a_{ij}]$  e  $B = [b_{ij}]$  são iguais se, e somente se:

1. ambas possuírem o mesmo número de linhas  $m$  e o mesmo número de colunas  $n$ ;
2. possuem elementos idênticos nas localizações correspondentes no arranjo:

$$a_{ij} = b_{ij},$$

para todo  $i = 1, 2, \dots, m$  e  $j = 1, 2, \dots, n$ .

## Exemplo 3

### Exemplo 3

*Temos que*

$$A_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \neq B_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

*pois os elementos da posição 21 (2ª linha e 1ª coluna) são distintos:*

$$a_{21} = 2 \neq b_{21} = 1.$$

## Exemplo 4

*Para que tenhamos*

$$A_{2 \times 1} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = B_{2 \times 1} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix},$$

*devemos tomar*

$$x = a_{11} = b_{11} = 7 \quad e \quad y = a_{21} = b_{21} = 4.$$

# Operações com Matrizes

---

Para somar ou subtrair duas matrizes, ambas devem ter a mesma ordem. Se isto é satisfeito, basta aplicar a operação de adição (ou subtração) a cada par de elementos correspondentes:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} \end{bmatrix}$$

## Exemplo 5

Dadas as matrizes  $A = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$  e  $B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$ , ambas  $2 \times 2$ , a soma  $A + B$  é dada por:

$$\begin{bmatrix} 4 & 9 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+2 & 9+0 \\ 2+0 & 1+7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 9 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}.$$

## Exemplo 6

Dadas as matrizes  $A = \begin{bmatrix} 19 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$  e  $B = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix}$ , ambas  $3 \times 1$ , a subtração  $A - B$  é dada por:

$$\begin{bmatrix} 19 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 - 6 \\ 2 - 8 \\ 3 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -6 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

## Operações com matrizes: adição e subtração

Em geral, escrevemos

- $[a_{ij}]_{m \times n} + [b_{ij}]_{m \times n} = [c_{ij}]_{m \times n}$ , onde  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ ;
- $[a_{ij}]_{m \times n} - [b_{ij}]_{m \times n} = [d_{ij}]_{m \times n}$ , onde  $d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$ .

## Operações com matrizes: multiplicação por um escalar

Multiplicar uma matriz por um número (escalar)  $k$  é multiplicar cada elemento da matriz em questão pelo dado escalar:

$$k \times \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \cdot a_{11} & k \cdot a_{12} \\ k \cdot a_{21} & k \cdot a_{22} \end{bmatrix}.$$

Em geral, escrevemos  $k \times [a_{ij}] = [b_{ij}]$ , onde  $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$ .

## Exemplo 7

Dada a matriz  $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -9 \end{bmatrix}$  e o escalar 7, o produto  $7 \times A$  é dado por

$$\begin{aligned} 7 \times \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 5 & -9 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 7 \cdot 3 & 7 \cdot (-1) & 7 \cdot 2 \\ 7 \cdot 0 & 7 \cdot 5 & 7 \cdot (-9) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 21 & -7 & 14 \\ 0 & 35 & -63 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

## Operações com Matrizes: Multiplicação de Matrizes

- Esta operação não é direta como as anteriores.
- Ela está definida de modo a ter aplicações mais úteis do que simplesmente multiplicar cada entrada correspondente.
- A multiplicação de matrizes serve para diversas finalidades em álgebra linear, com aplicações em transformações lineares, teoria dos gráficos, equações diferenciais, física, estatísticas multivariadas, entre outras áreas.
- Ela permite representar e manipular sistemas de equações lineares de uma maneira compacta e eficiente.

# Multiplicação de Matrizes

- Na multiplicação entre duas matrizes,  $A \cdot B$ , a condição de conformidade é que a dimensão da coluna de  $A$  (matriz “guia”) deve ser igual à dimensão da linha de  $B$  (matriz “guiada”).

$$\begin{array}{c} \left[ \mathbf{A} \right] \cdot \left[ \mathbf{B} \right] = \left[ \mathbf{C} \right] \\ \begin{array}{c} m \times n \\ \vdots \\ \text{\#Colunas = \#Linhas} \\ \vdots \\ n \times p \end{array} \\ \downarrow \\ \text{Ordem da matriz} \\ \text{resultante da} \\ \text{multiplicação} \end{array}$$

The diagram illustrates the matrix multiplication  $A \cdot B = C$ . Matrix  $A$  is labeled with dimensions  $m \times n$ . Matrix  $B$  is labeled with dimensions  $n \times p$ . A pink dashed line connects the  $n$  in  $m \times n$  to the  $n$  in  $n \times p$ , with the text "#Colunas = #Linhas" below it. The resulting matrix  $C$  is labeled with dimensions  $m \times p$ . A black arrow points from the  $m \times p$  label to the text "Ordem da matriz resultante da multiplicação".

## Exemplo 8

Dadas as matrizes  $A_{1 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}$  e  $B_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 17 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  
podemos efetuar o produto  $AB$ , pois

$$A_{1 \times 2} \quad e \quad B_{2 \times 3},$$

mas não podemos efetuar o produto  $BA$ :

$$B_{2 \times 3} \quad e \quad A_{1 \times 2}.$$

## Exercício

### Exercício 1

Considere as matrizes abaixo:

$$A_{1 \times 2} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0.5 & \pi & 1 \end{bmatrix} \text{ e } C_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Quais multiplicações podem ser efetuadas? No caso positivo, qual a ordem da matriz resultante?

a.  $A \cdot B$

b.  $A \cdot C$

c.  $B \cdot A$

d.  $B \cdot C$

e.  $C \cdot A$

f.  $C \cdot B$

## Multiplicação de matrizes: o método

- Para ilustrar como obter a matriz  $C = A \cdot B$ , tomamos como exemplo as matrizes

$$A_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}.$$

- Podemos efetuar o produto  $AB$ , uma vez que a dimensão da coluna de  $A$  é 2 que coincide com a dimensão da linha de  $B$ . A matriz produto  $C = AB$  tem ordem  $3 \times 2$ .

# Multiplicação de matrizes: o método

Queremos encontrar cada elemento  $c_{ij}$ , usando os valores de  $a_{ij}$  e  $b_{ij}$ :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{bmatrix}$$

$3 \times 2$  $2 \times 2$  $3 \times 2$

# Multiplicação de matrizes: o método

- Para obter  $c_{11}$ , usamos a 1ª linha de  $A$  e a 1ª coluna de  $B$ :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}_{3 \times 2} \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

$$c_{11} = a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21}$$

# Multiplicação de matrizes: o método

- Para obter  $c_{21}$ , usamos a 2ª linha de  $A$  e a 1ª coluna de  $B$ :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}_{3 \times 2} \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

$$c_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}$$

# Multiplicação de matrizes: o método

- Para obter  $c_{31}$ , usamos a 3ª linha de  $A$  e a 1ª coluna de  $B$ :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}_{3 \times 2} \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

$$c_{31} = a_{31} b_{11} + a_{32} b_{21}$$

# Multiplicação de matrizes: o método

- Para obter  $c_{12}$ , usamos a 1ª linha de  $A$  e a 2ª coluna de  $B$ :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}_{3 \times 2} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

$$c_{12} = a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22}$$

# Multiplicação de matrizes: o método

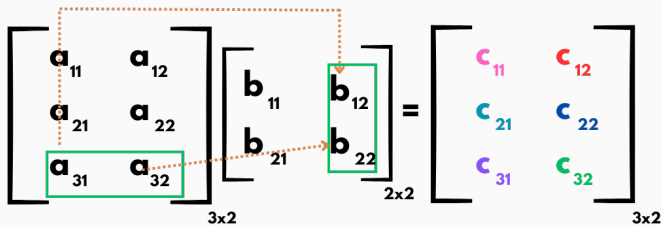
- Para obter  $c_{22}$ , usamos a 2ª linha de  $A$  e a 2ª coluna de  $B$ :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}_{3 \times 2} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

$$c_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}$$

# Multiplicação de matrizes: o método

- Para obter  $c_{32}$ , usamos a 3ª linha de  $A$  e a 2ª coluna de  $B$ :


$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}_{3 \times 2} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

$$c_{32} = a_{31} b_{12} + a_{32} b_{22}$$

## Multiplicação de matrizes: o método

Então, a matriz produto  $AB$  é dada por:

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} \\ a_{31} \cdot b_{11} + a_{32} \cdot b_{21} & a_{31} \cdot b_{12} + a_{32} \cdot b_{22} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

## Exemplo

### Exemplo 9

Dadas as matrizes  $A_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$  e  $B_{2 \times 1} = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \end{bmatrix}$ , o produto

$AB$  está definido, pois a dimensão da coluna de  $A$ ,  $n = 2$ , coincide com a dimensão da linha de  $B$ ,  $m = 2$ . A matriz  $AB = [c_{ij}]$  é  $3 \times 1$ .

Solução:

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \cdot 5 + 3 \cdot 9 \\ 2 \cdot 5 + 8 \cdot 9 \\ 4 \cdot 5 + 0 \cdot 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 \\ 82 \\ 20 \end{bmatrix} \end{aligned}$$