Álgebra Linear - Aula 04

Combinação Linear. Base de um Espaço Vetorial.

Profª Dra. Karla Lima

Sumário

Combinação Linear

Formar um vetor novo a partir de outros vetores, usando multiplicações por escalar e somas de vetores.

Combinação Linear

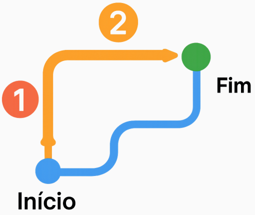
- **Receita de cozinha:** Imagine que cada vetor é um ingrediente (farinha, leite, ovo).
- A combinação linear é como escolher quanto de cada ingrediente você coloca e depois misturar.
- O prato final (bolo, pão, panqueca) é o novo vetor que surge da combinação.

Combinação Linear

- **Música:** Cada nota musical é um vetor.
- Você pode tocar uma nota mais forte (multiplicar por um número) ou mais fraca.
- Quando junta as notas, surge uma melodia: o vetor novo formado pela combinação linear.

Combinação Linear

- **Caminhos num mapa:** Cada vetor é um caminho básico (ir para o norte, ir para o leste, ir para o sul, ir para o oeste).
- Se você anda 2 passos para o norte e 3 passos para o leste, você formou um novo caminho.
- Esse novo caminho é a combinação linear dos movimentos básicos.



Definição

Dizemos que um vetor $\mathbf{w}$ num espaço vetorial V é uma ***combinação linear*** *dos vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots \mathbf{v}_n$ em V se $\mathbf{w}$ puder ser expresso na forma*

$$w = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n$$

em que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são escalares. Esses escalares são denominados ***coeficientes*** *da combinação linear.*

Combinação Linear - Exemplos

Exemplo

a) *Mostre que qualquer vetor de* $\mathbb{R}^2$ *pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores* $e_1 = (1, 0)$ *e* $e_2 = (0, 1)$.

b) *Mostre que o vetor* $\mathbf{w} = (9, 2, 7)$ *é uma combinação linear de* $\mathbf{u} = (1, 2, -1)$ *e* $\mathbf{v} = (6, 4, 2)$.

c) *Mostre que* $\mathbf{z} = (4, -1, 8)$ *não é uma combinação linear de* $\mathbf{u}$) *e* $\mathbf{v}$ *dados no item b).*

Independência Linear

Um conjunto de vetores é linearmente independente quando nenhum deles pode ser construído a partir de combinações dos outros usando multiplicações por números e somas de vetores.

Independência Linear

Cores primárias:

- **Vermelho**, **Azul** e Amarelo são cores primárias.
- Nenhuma pode ser criada a partir das outras duas.
- Portanto, são **linearmente independentes**.

Exemplo de dependência:

- A cor **Roxo** pode ser criada misturando Vermelho e Azul.
- Logo, o conjunto {Vermelho, Azul, Amarelo, Roxo} é **linearmente dependente**.

Exemplo de dependência:

- A cor **Roxo** pode ser criada misturando Vermelho e Azul.
- Logo, o conjunto {Vermelho, Azul, Amarelo, Roxo} é **linearmente dependente**.

Definição

Um conjunto de vetores é linearmente dependente quando pelo menos um deles pode ser obtido combinando os outros, por meio de multiplicações por números e somas de vetores.

Definição

Se $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots \mathbf{v}_r\}$ for um conjunto não vazio de vetores num espaço vetorial V, então a equação vetorial

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \cdots + k_r\mathbf{v}_r = 0$$

tem uma solução, pelo menos, a saber,

$$k_1 = 0,\ k_2 = 0,\ \ldots,\ k_r = 0.$$

Dizemos que essa é a ***solução trivial****.*

1. *Se essa for a única solução, dizemos que S é um* ***conjunto linearmente independente****.*
2. *Se existem outras soluções além da trivial, dizemos que S é um* ***conjunto linearmente dependente****.*

Exemplo 2

Exemplo

Vamos verificar a independência linear dos conjuntos abaixo.

1. $S = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$
2. $S = \{(1, -2), (0, 1), (3, 2)\}$
3. $S = \{1, x, x^2, x^3\}$

Conjunto de Geradores

Será que todo vetor pode ser construído a partir de outros?

Definição

Se $S = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ *é um conjunto não vazio, denotamos por*

$$ger\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n\} \quad ou \quad ger(S)$$

o conjunto gerado por todas as combinações lineares possíveis dos elementos de S.

Exemplo 3

Exemplo

a) *O conjunto dos vetores canônicos* $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ *gera o espaço* $\mathbb{R}^3$.

b) *O conjunto dos vetores* $\{(2,1,0),(-1,0,0),(2,0,0)\}$ *NÃO gera o espaço* $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 4

Exemplo

a) *O conjunto dos vetores canônicos* $\{(1,0),(0,1)\}$ *gera o espaço* $\mathbb{R}^2$.

b) *O conjunto de vetores* $\{(2,1),(-1,0),(0,0)\}$ *gera o espaço* $\mathbb{R}^2$.

Exemplo

O conjunto dos vetores $\{1, x, x^2, x^3\}$ *gera o espaço* P_3*, dos polinômios de grau menor ou igual a 3.*

Exercícios

1. Faça os exercícios da seção 4.2 do livro Álgebra Linear com Aplicações, de Howard Anton and Chris Rorres: 11 ao 13 e do 16 ao 18 e 20.

Referências I

[1] Howard Anton and Chris Rorres.
***Álgebra Linear com Aplicações*.**
Bookman, Porto Alegre, 10 edition, 2012.
Tradução técnica: Claus Ivo Doering. Editado também como livro impresso em 2012.
Recurso eletrônico.