Álgebra Linear - Aula 03

Subespaços Vetoriais / Combinação Linear

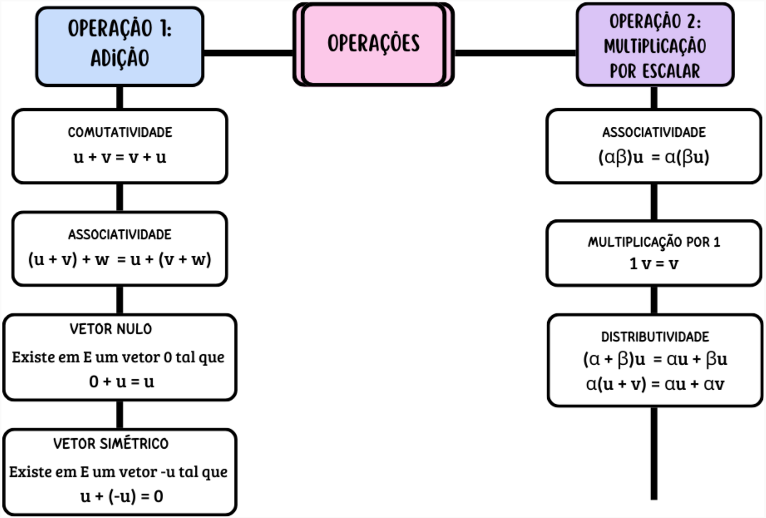
Profª Dra. Karla Lima

Sumário

Da definição [2]

- A noção de espaço vetorial é o terreno onde se desenvolve toda a Álgebra Linear.
- Um **espaço vetorial** E é um conjunto cujos elementos são chamados *vetores*, no qual estão definidas duas operações:

Essas operações devem satisfazer, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $u, v, w \in E$, as condições abaixo, chamadas *axiomas de espaço vetorial*:



OPERAÇÕES
OPERAÇÃO 1: ADIÇÃO
COMUTATIVIDADE
$u + v = v + u$
ASSOCIATIVIDADE
$(u + v) + w = u + (v + w)$
VETOR NULO
Existe em E um vetor 0 tal que
$0 + u = u$
VETOR SIMÉTRICO
Existe em E um vetor -u tal que
$u + (-u) = 0$
OPERAÇÃO 2: MULTIPLICAÇÃO POR ESCALAR
ASSOCIATIVIDADE
$(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$
MULTIPLICAÇÃO POR 1
$1\,v = v$
DISTRIBUTIVIDADE
$(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$
$\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$

Exemplo 1

Exemplo

De modo geral, o conjunto $(\mathbb{M}_{m \times n}, +, \cdot)$ *de todas as matrizes de ordem* $m \times n$ *é um espaço vetorial com as operações usuais de matrizes.*

Exemplo 2

Exemplo

Seja $\mathcal{F}(-\infty, \infty) = \{\boldsymbol{f} \,|\, \boldsymbol{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ *o conjunto de todas as funções definidas no intervalo* $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$*. Definimos as operações de adição e multiplicação por escalar por*

$$(\boldsymbol{f} + \boldsymbol{g})(x) = f(x) + g(x)$$
$$(a \cdot \boldsymbol{f})(x) = a\, f(x),$$

e, com essas operações, o espaço $(\mathcal{F}(-\infty, \infty), +, *)$ *é um espaço vetorial.*

Exemplo 3

Exemplo

Seja $V = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 0\}$ *e defina as operações de* V *por*

$$u + v = uv$$

$$a * u = u^a.$$

O conjunto $V = (V, +, *)$ *é um espaço vetorial!*

Exemplo 4

Exemplo

Seja $V = \mathbb{R}^2$ *com as operações definidas por:*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} &= (u_1 + v_1, u_2 + v_2) \\ a * \boldsymbol{u} &= (au_1, 0). \end{aligned}$$

Com essas operações, $V = (\mathbb{R}^2, +, *)$ *não é um espaço vetorial.*

Teorema 2

Teorema

Sejam V um espaço vetorial, $\boldsymbol{u}$ um vetor em V e a um escalar. Então

a) $0 \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$
b) $(-1) \cdot \boldsymbol{u} = -\boldsymbol{u}$
c) $a \cdot \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$
d) *Se* $a \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$, *então* $a = 0$ *ou* $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$.

Subespaços Vetoriais

Definição

Um subconjunto W de um espaço vetorial V é denominado ***subespaço*** *de V se W for um espaço vetorial por si só com as operações de adição e multiplicação por escalar definidas em V.*

Definição

V um espaço vetorial

W um subconjunto de V

W herda as propriedades de adição:
Axioma 3: Comutatividade
Axioma 4: Associatividade

W herda as propriedades de multiplicação:
Axiomas 7 e 8: Distributividades
Axioma 9: Associatividade
Axioma 10: Multiplicação por 1

W não herda:
Axioma 1: Fechamento na adição
Axioma 4: Existência de vetor zero em W
Axioma 5: Existência de negativo em W
Axioma 6: Fechamento na multiplicação por escalar.

Teorema

Se W for um conjunto não vazio em um espaço vetorial V $= (V, +, *)$, então W é um subespaço de V se, e somente se, as condições seguintes forem válidas.

a) *Se* ***u*** *e* ***v*** *forem vetores em W, então* ***u + v*** *está em W.*

b) *Se a for um escalar qualquer e* ***u*** *um vetor de W, então a* $*$ ***u*** *está em W.*

Exemplo 5

Exemplo

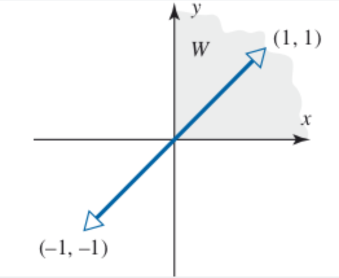
a) *Uma reta que passa pela origem tem equação geral* $y - kx = 0$*, onde* k *é uma constante. Tais retas são subespaços vetoriais em* $\mathbb{R}^2$.

Exemplo 5

Exemplo

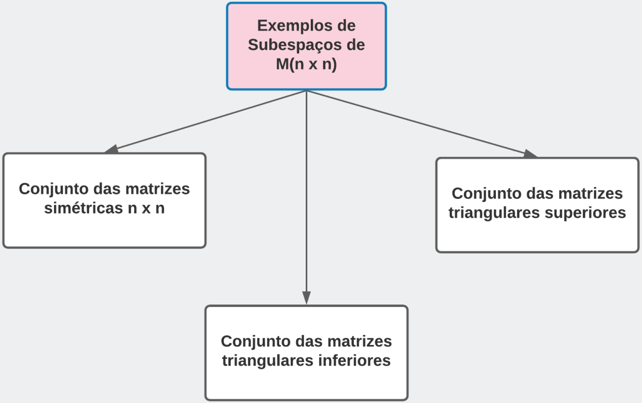
a) *Uma reta que passa pela origem tem equação geral* $y - kx = 0$, *onde* k *é uma constante. Tais retas são subespaços vetoriais em* $\mathbb{R}^2$.

b) *O conjunto de todos os pontos de* $\mathbb{R}^2$ *tais que* $x \geq 0$ *e* $y \geq 0$, *não é um espaço vetorial.*



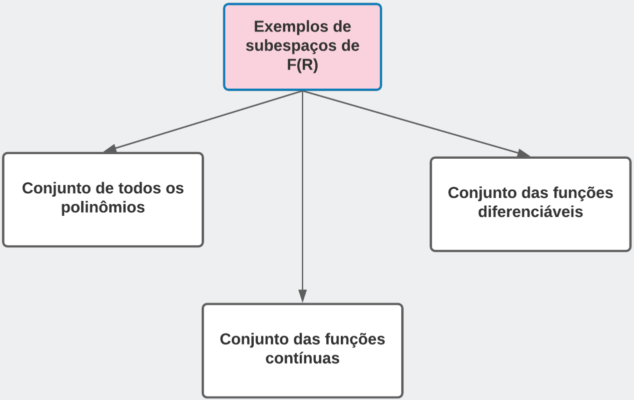
Exemplo 6: Subespaços em $\mathbb{M}_{n \times n}$

Exemplo



Exemplo 7: Subespaços em $\mathcal{F}(-\infty, \infty)$

Exemplo



Combinação Linear

Combinação Linear [1]

Definição

*Dizemos que um vetor $\boldsymbol{w}$ num espaço vetorial V é uma **combinação linear** dos vetores $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \ldots \boldsymbol{v}_n$ em V se $\boldsymbol{w}$ puder ser expresso na forma*

$$w = a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + a_n\boldsymbol{v}_n$$

*em que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são escalares. Esses escalares são denominados **coeficientes** da combinação linear.*

Exemplo

a) *Mostre que qualquer vetor de* $\mathbb{R}^2$ *pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores* $e_1 = (1, 0)$ *e* $e_2 = (0, 1)$.

b) *Mostre que o vetor* $\mathbf{w} = (9, 2, 7)$ *é uma combinação linear de* $\mathbf{u} = (1, 2, -1)$ *e* $\mathbf{v} = (6, 4, 2)$.

c) *Mostre que* $\mathbf{z} = (4, -1, 8)$ *não é uma combinação linear de* $\mathbf{u}$) *e* $\mathbf{v}$ *dados no item b).*

1. Faça os exercícios da seção 4.2 do livro Álgebra Linear com Aplicações, de Howard Anton and Chris Rorres: 1 ao 10.

Referências I

[1] Howard Anton and Chris Rorres.
***Álgebra Linear com Aplicações*.**
Bookman, Porto Alegre, 10 edition, 2012.
Tradução técnica: Claus Ivo Doering. Editado também como livro impresso em 2012.
Recurso eletrônico.

[2] Elon Lages Lima.
***Álgebra Linear*.**
Coleção Matemática Universitária. IMPA, Rio de Janeiro, 1 edition, 2014.
Inclui bibliografia.