Aula 03: Sistemas Lineares Gerais

Karla Lima

Álgebra Linear e Geometria Analítica

FACET/UFGD

O Método da Eliminação

Exemplo 1

Vamos resolver o sistema linear para ilustrar o método da eliminação:

$$\begin{aligned} x - y &= 1 \\ 2x + y &= 6. \end{aligned}$$

Exemplo 1 – Resolução

Somando as duas equações, **eliminamos** a variável y:

$$\begin{aligned}(x - y) + (2x + y) &= 1 + 6 \\ 3x &= 7 \\ x &= \frac{7}{3}\end{aligned}$$

Exemplo 1 – Resolução

Substituindo em qualquer umas das equações iniciais, por exemplo em $x - y = 1$:

$$\begin{aligned} \frac{7}{3} - y &= 1 \\ y &= \frac{7}{3} - 1 \\ y &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Solução: $(x, y) = \left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}\right)$.

Exemplo 2

Vamos resolver o sistema linear pelo método da eliminação:

$$
\begin{aligned}
x + y &= 4 \\
3x + 3y &= 6.
\end{aligned}
$$

Exemplo 3

Exemplo 3

Vamos resolver o sistema linear pelo método da eliminação:

$$4x - 2y = 1$$

$$16x - 8y = 4.$$

Exemplo 4

Vamos resolver o sistema linear pelo método da eliminação:

$$x - y + 2z = 5$$
$$2x - 2y + 4z = 10$$
$$3x - 3y + 6z = 15.$$

Definição Formal [1]

Equação Linear

Definimos uma **equação linear** nas n variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ como uma equação que pode ser expressa na forma

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n = b$$

Equação Linear

Definimos uma **equação linear** nas n variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ como uma equação que pode ser expressa na forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$$

No caso particular em que $b = 0$, dizemos que

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = 0$$

é uma **equação linear homogênea**.

Exemplos de Equações Lineares

São equações lineares:

* $x + 3y = 7$
* $x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 0$
* $\frac{1}{2}x - y - 3z = -1$
* $x = 1$

Não são equações lineares:

* $x + 3y^2 = 4$
* $3x + 2y - xy = 5$
* $sen\, x + y = 0$
* $\sqrt{x_1} + 2x_2 + x_3 = 1$

Sistemas Lineares

Uma coleção finita de equações lineares é denominada **sistema de equações lineares**. As variáveis de uma sistema linear são denominadas **incógnitas**.

De modo geral, um sistema linear de m equações e n incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pode ser escrito da forma

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad &\;\;\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m,
\end{aligned}$$

onde i indica em qual equação o coeficiente a_{ij} está e o índice j indica qual incógnita o coeficiente está multiplicando.

Exemplo 5

O sistema

$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 + 3x_3 &= -1 \\ 3x_1 + x_2 + 9x_3 &= -4 \end{aligned}$$

é um sistema linear com duas equações e três incógnitas: x_1, x_2 *e* x_3.

Soluções de Sistemas Lineares

Uma **solução** de um sistema linear é uma sequência de n números $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ tal que, ao substituirmos s_i no lugar de x_i, as equações tornam-se verdadeiras.

Obs: O conjunto $\mathcal{S}$, de todas as soluções de um sistema linear, pode ser vazio, finito ou infinito.

Exemplo 6

Seja $\mathcal{S}$ o conjunto solução do sistema de equações lineares

$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 + 3x_3 &= -1 \\ 3x_1 + x_2 + 9x_3 &= -4. \end{aligned}$$

Mostre que:

a) $(1, 2, -1)$ *é uma solução do sistema.*
b) $\left(0, -\frac{1}{4}, -\frac{5}{12}\right)$ *é uma solução do sistema.*
c) $\left(0, 0, -\frac{1}{3}\right)$ *não é uma solução do sistema.*

Exemplo 7

Resolva o sistema abaixo usando o método da eliminação:

$$
\begin{aligned}
4x_1 - x_2 + 3x_3 &= -1 \\
3x_1 + x_2 + 9x_3 &= -4.
\end{aligned}
$$

Exemplo 7 – Resolução

$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 + 3x_3 &= -1 \quad (1) \\ 3x_1 + x_2 + 9x_3 &= -4 \quad (2) \end{aligned}$$

Eliminando x_2: somamos (1) e (2):

$$\begin{aligned} (4x_1 - x_2 + 3x_3) + (3x_1 + x_2 + 9x_3) &= -1 + (-4) \\ 7x_1 + 12x_3 &= -5 \end{aligned}$$

Exemplo 7 – Resolução

Isolando x_1:

$$x_1 = \frac{-5 - 12x_3}{7}.$$

Substituindo em (2):

$$3\left(\frac{-5 - 12x_3}{7}\right) + x_2 + 9x_3 = -4.$$

Exemplo 7 – Resolução

Multiplicando por 7:

$$\begin{aligned} 3(-5-12x_3)+7x_2+63x_3 &= -28 \\ -15-36x_3+7x_2+63x_3 &= -28 \\ 7x_2+27x_3 &= -13 \end{aligned}$$

Logo,

$$x_2 = \frac{-13-27x_3}{7}.$$

Exemplo 7 – Resolução

Solução geral:

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{-5 - 12x_3}{7}, \frac{-13 - 27x_3}{7}, x_3 \right), \quad x_3 \in \mathbb{R}.$$
$$= x_3 \left(\frac{-5 - 12}{7}, \frac{-13 - 27}{7}, 1 \right)$$

Exemplo 7 – Resolução

Solução geral:

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{-5-12x_3}{7}, \frac{-13-27x_3}{7}, x_3\right), \quad x_3 \in \mathbb{R}.$$
$$= x_3\left(\frac{-5-12}{7}, \frac{-13-27}{7}, 1\right)$$

- Como x_3 pode ser qualquer número real, e temos infinitos números reais, existem infinitas soluções para este problema.

Considerações Finais

O que aprendemos

- Equações Lineares são equações em que as incógnitas aparecem apenas acompanhadas de escalares.
- Um Sistema de Equações Lineares é uma coleção - finita - de Equações Lineares.
- Encontrar uma solução de um sistema linear é encontrar uma sequência de números que satisfaçam, ao mesmo tempo, todas as equações do sistema.

Referências

H. Anton and C. Rorres.
***Álgebra Linear com Aplicações*.**
Bookman Editora, 10 edition, 2012.