Álgebra Linear - Aula 01

Apresentação da Disciplina e Revisão de Sistemas Lineares

Profª Dra. Karla Lima

Sumário

Avaliações

PLANO DE ENSINO (Clique aqui!)

- P1: 16/09/2025
- P2: 25/11/2025
- PS: 02/12/2025 (Somente com o conteúdo da menor nota entre P1 e P2)
- Data limite para a apresentação dos projetos (P e Q): 18/11/2025
- Exame Final (EF): 09/12/2025

Fórmula de Avaliação

$$MA = 0,3 \cdot P1 + 0,3 \cdot P2 + 0,2 \cdot P + 0,2 \cdot Q$$

Bibliografia

Clique no texto para ter acesso aos arquivos PDFs:

- ANTON, Howard; RORRES, Chris,Doering, Claus Ivo. Álgebra linear com aplicações. 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.
- LIMA, ELON LAGES. Algebra linear. 2. Rio de Janeiro: Instituto de Matematica Pura e Aplicada, 1996. .

Pense na seguinte pergunta:

O dobro da minha idade adicionado a 9 é igual a 89. Qual é a minha idade?

Pense na seguinte pergunta:

O dobro da minha idade adicionado a 9 é igual a 89. Qual é a minha idade?

- Para responder à pergunta, podemos escrever uma sentença matemática chamada **equação**.
- Uma **equação é uma igualdade** em que há pelo menos uma letra que representa um número desconhecido.

- Como podemos transformar essa situação do cotidiano em uma sentença matemática?

- Como podemos transformar essa situação do cotidiano em uma sentença matemática?
- O que representa a letra x nesse contexto?

Equações

- Como podemos transformar essa situação do cotidiano em uma sentença matemática?
- O que representa a letra x nesse contexto?
- Por que usamos uma letra e não um número direto?

- Chamando de x a minha idade, escrevemos a seguinte equação:

$$2x + 9 = 89.$$

Resolvendo a equação $2x + 9 = 89$:

Passo 1: Subtrair 9 dos dois lados:

$$2x + 9 - 9 = 89 - 9$$

Resultado do Passo 1:

$$2x = 80$$

Passo 2: Dividir ambos os lados por 2:

$$\frac{1}{2}2x = 80\frac{1}{2}$$

Resultado Final:

$$x = 40$$

Solução: $\boxed{x = 40\, anos}$

Equações

- Por que o primeiro passo para resolver é subtrair 9 dos dois lados?
- O que acontece se fizermos uma operação só em um dos lados da equação?
- Qual o significado prático do valor que encontramos para x?

Equações

- Para determinar o valor de x podemos utilizar a operação inversa da adição (subtração) e a inversa da multiplicação (divisão exata), isto é:
- ao efetuar $89 - 9$ obtemos 80, que corresponde ao valor de $2x$;
- ao efetuar $80 : 2 = 80 \cdot \frac{1}{2}$ obtemos 40, que corresponde ao valor de x.
- Assim, a minha idade é 40 anos.

Definição

Equação é uma sentença matemática expressa por uma igualdade em que há pelo menos uma letra que representa um número desconhecido, chamada incógnita.

OBS: Resolver uma equação é encontrar o valor desconhecido da incógnita, ou seja, obter a solução ou a raiz da equação. Em uma equação, podemos destacar os seguintes elementos:

$$\underbrace{2\overbrace{x}^{\text{incógnita}}+9}_{1^{\text{o}}\text{ membro}}=\underbrace{89}_{2^{\text{o}}\text{ membro}}$$

Definição

Equação é uma sentença matemática expressa por uma igualdade em que há pelo menos uma letra que representa um número desconhecido, chamada incógnita.

OBS: Resolver uma equação é encontrar o valor desconhecido da incógnita, ou seja, obter a solução ou a raiz da equação. Em uma equação, podemos destacar os seguintes elementos:

$$\underbrace{2\overbrace{x}^{\text{incógnita}}+9}_{\text{1º membro}} = \underbrace{89}_{\text{2º membro}}$$

$x = 40$ é uma solução (ou raiz) da equação.

Considerando a equação $2x + 5 = 13$, observamos o seguinte:

- para $x = 1$:

$$2 \cdot 1 + 5 = 13$$

$$7 = 13 \longleftarrow \text{(sentença falsa)}$$

Assim, 1 não é raiz da equação.

- para $x = 2$:

$$2 \cdot 2 + 5 = 13$$

$$9 = 13 \longleftarrow \text{(sentença falsa)}$$

Assim, 2 não é raiz da equação.

- para $x = 3$:

$$2 \cdot 3 + 5 = 13$$

$$11 = 13 \longleftarrow \text{(sentença falsa)}$$

Assim, 3 não é raiz da equação.

- para $x = 4$

$$2 \cdot 4 + 5 = 13$$

$$13 = 13 \longleftarrow \text{(sentença verdadeira)}$$

Assim, 4 é raiz da equação.

Exemplos de Equações

Exemplo

$$x + 3 = 5 \qquad 2a + b = 45 \qquad x^2 + 6 = -5x$$

Exemplo

Resolva:

A diferença entre o dobro de certo número e 7 é igual a 13. Qual é esse número?

Agora vamos estudar o seguinte problema:

- Em um estacionamento, entre carros e motos, há 12 veículos, sendo a maioria carros. A diferença entre a quantidade de carros e o dobro da quantidade de motos é igual a 3.
  Quantos carros e quantas motos há nesse estacionamento?

Sistema de Equações

- Quais seriam as variáveis que devemos representar?
- Como podemos transformar essas frases em equações?
- Por que precisamos de duas equações para resolver esse tipo de problema?

- Quais seriam as variáveis que devemos representar?
- Como podemos transformar essas frases em equações?
- Por que precisamos de duas equações para resolver esse tipo de problema?

Informação	Equação
Quantidade total de veículos	$x + y = 12$
Diferença entre a quantidade de carros e o dobro da quantidade de motos	$x - 2y = 3$

As duas equações obtidas formam um **sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas**.

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$$

Considerando as funções:

- $y = 12 - x$ (primeira equação)
- $y = \dfrac{x+3}{2}$ (segunda equação)

vocês devem recordar da disciplina de **Números Reais e Funções** que ambas são **funções afim**, com seu gráfico descrevendo retas no plano cartesiano $\mathbb{R}^2$.

Interpretação geométrica

Há 3 possibilidades para a posição destas retas no plano:

- As retas se cruzam: o problema tem uma única solução.
- As retas são paralelas (não possuem interseção): o problema não possui solução.
- As retas são coincidentes: o problema possui infinitas soluções.

- Vamos usar o GeoGebra para visualizar o comportamento das retas.
- Link da atividade: Sistemas Lineares

Três tipos de sistemas

Sistema Possível e Determinado

As retas se cruzam: sistema possível e determinado — uma única solução.

Sistema Impossível

As retas **não** se cruzam: sistema impossível — não há solução.

Sistema Possível e Indeterminado

As retas são coincidentes: sistema possível e indeterminado — infinitas soluções.

Definição

Um conjunto de m ($m \geq 1$) equações lineares, nas incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é chamado de sistema linear de ordem $m \times n$.

Assim, o sistema linear

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$$

é de ordem 2×2, pois possui duas equações e duas incógnitas (x e y).

Exemplo

Determine a ordem dos sistemas lineares abaixo:

a)

$$\begin{cases} 3x - y - z = 4 \\ 2x + 5y + 7z = 0 \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ 2x + y - z = 1 \\ 3x - y + z = 4 \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} 4x - y + z + t + w = 1 \\ z - t + w = 0 \\ 2t - w = 1 \end{cases}$$

Dado o sistema

$$\begin{cases} 2x + y = 12 \\ x - 2y = 6 \end{cases}$$

procedemos como a seguir.

1. Escolhemos uma das equações para isolar uma das variáveis.
2. Tentamos escolher a variável com coeficiente 1, se for possível:

$$\begin{aligned} 2x + y = 12 &\Rightarrow 2x + y - 2x = 12 - 2x \\ &\Rightarrow y = 12 - 2x. \end{aligned}$$

3. Com esse valor de y, substituímos na equação QUE NÃO USAMOS para isolar a variável:

$$\begin{aligned} x - 2y = 6 &\Rightarrow x - 2(12 - 2x) = 6 \\ &\Rightarrow x - 24 + 4x = 6 \Rightarrow 5x - 24 + 24 = 6 + 24 \\ &\Rightarrow 5x = 30 \end{aligned}$$

Assim,

$$5x = 30 \Rightarrow \frac{1}{5}5x = \frac{1}{5}30$$
$$\Rightarrow x = 6.$$

4. Por fim, a partir deste valor de x, encontramos o valor de y:

$$y = 12 - 2x \Rightarrow y = 12 - 2 \cdot 6 \Rightarrow y = 0.$$

Assim, a solução do sistema é $x = 6$ e $y = 0$.

O Método da Soma

Novamente, tomamos o sistema

$$\begin{cases} 2x + y = 12 \\ x - 2y = 6 \end{cases}$$

e procedemos como a seguir.

1. Escolhemos uma das variáveis para eliminar através do processo de soma, termo a termo, das equações.
2. Neste caso, vamos escolher a variável x. Para isso, precisamos multiplicar toda a segunda equação por -2:

$$\begin{aligned} x - 2y = 6 &\Rightarrow -2(x - 2y) = -2 \cdot 6 \\ &\Rightarrow -2x + 4y = -12. \end{aligned}$$

3. Assim, obtemos o sistema linear equivalente (com as mesmas soluções) ao dado:

$$\begin{cases} 2x + y = 12 \\ -2x + 4y = -12 \end{cases}$$

4. Somamos as duas equações:

$$\underbrace{(2x + y) + (-2x + 4y)}_{\text{1ºs membros}} = \underbrace{12 + (-12)}_{\text{2ºs membros}}$$

Logo,

$$2x - 2x + y + 4y = 0 \Rightarrow 5y = 0 \Rightarrow y = 0$$

5. Substituímos o valor de y em uma das equações:

$$2x + 0 = 12 \Rightarrow x = 6$$

Assim, a solução do sistema é $x = 6$ e $y = 0$.

Solução de Sistemas Lineares Maiores

Para sistemas lineares com mais de duas equações ou mais de duas incógnitas, o método do escalonamento é o mais indicado.

Neste momento, não abordaremos esse método em detalhes, mas ele será retomado no momento oportuno.